目　录

《九章算术》校证*

白 尚 恕

《九章算术》是中国最古老的一部数学名著。由于古代辗转传抄，衍文夺字之处非常之多。先后经过李淳风、杨辉、戴震、李潢、沈钦裴(十九世纪初)、李锐(1768—1817)、钱宝琮等人校订，他们付出了很多辛勤劳动，做了不少校订工作。这些对于后世都有巨大的裨益；不过也有些地方美中不足。钱宝琮说："戴震校证的文字，颠扑不破的果然不少，但也有些地方他师心自用，把原本不错的文字改掉，后来的读者很容易被他蒙蔽而引起误会。"又说："李潢校订后，一般都能文从字顺，容易理解了。但碰到戴震误改原文的地方，他就没有能够纠正过来。"后来，钱宝琮在各家校订的基础上，重加校订，于一九六三年写出校订文字四百六十多条。

钱宝琮的校订工作既深入又细致，所校订的文字恰到妙处，可以说他的校勘工作冠诸前人，具有莫大功绩。但是在四百余条的校订中，也难免有些误校和漏校的地方，也有些断句不太合适的地方。

今以中华书局出版的钱宝琮校点《算经十书》(1963)（以下简称为钱校本）为蓝本，对《九章算术》作一补充校订。凡前人校订正确之处，便择善而从。现今，为方便起见，先将钱校本的原文照录一遍，再写出一管之见，最后则加述一些必要的校订理由。分述如下：

---

* 本文系摘自白尚恕注释：《〈九章算术〉注释》·科学出版社。

一

[原文]（方田术下）此积谓田幂。

[校订] 此积为田幂。

虽然“谓”、“为”二字的音近，但两者的意义却不大相同，此处如是“此积谓田幂”，于意欠通；此处如是“此积为田幂”，意义则较为明显。同时由李注“此注前云积为田幂，于理得通”可知，此处应为“此积为田幂”。今依殿本校正。

二

[原文]（课分术下）唯相多之数，意共减分有异。

[校订] 唯相多之数，意与减分有异。

南宋本讹作“意共减分有异”，钱校本则以为“亦通”。似不妥当。因前文有“与减分意同”一语，此处似应为“意与减分有异”。同时，“与”、“共”两字的行书相近，传抄者可能误“与”为“共”。今依大典本及殿本校正。

三

[原文]（课分术下）减分知求其余数有几，课分知以其余数相多也。

[校订] 减分者，求其余数有几；课分者以其余数相多也。

因“者”、“知”二字的行书形近，传抄者可能误“者”为“知”。戴震、钱宝琮多处将“知”校改为“者”，可能就是这个原因。钱校本原文为“减分知求其余数有几，课分知以其余数相多也”。于意欠通，今为校正。

四

[原文]（平分术下）此当副置列数除平实。若然则重有分，

故反以列数乘同齐。

[校订] 此当副置列数除平实。若然则重有分，故反以列数乘同。

“平实”不是平均数的分子，而是平均数分子的列数倍。若平实不能被列数整除，只需以列数乘同，并不需以列数乘齐。若平实能被列数整除，即以其商作为平均数的分子，既无需以列数乘同，也无需以列数乘齐。

如果不以列数乘未并者，后文“以平实减列实”则无法相减。为了使平实能与列实相减，此处平实既然是平均数分子的列数倍，所以也必须扩大同样倍数才能相减，故有“以列数乘未并者各自为列实”一语。这一语就是针对后文“以平实减列实”来说的。

为了避免出现“重有分”，列数只需乘同，不必乘齐。各版本所衍之“齐”字，按理当删。

五

[原文]（圆田术下）倍之，为分寸之二百一十，即九十六觚之外弧田九十六所，谓以弦乘矢之凡幂也。

[校订] 倍之，为分寸之二百一十，即九十六觚之外方田九十六，所谓以弦乘矢之凡幂也。

当计算圆的内接正一百九十二边形与九十六边形之差时，得

$$S_{192}-S_{96}=\frac{105}{625},$$

刘徽称为“差幂”。取其二倍，即得

$$2(S_{192}-S_{96})=\frac{210}{625}。$$

所谓“差幂”，就是九十六个三角形的面积，取其二倍，实际上相当于九十六个长方形的面积。也就是说相当于正96边形之外九十六个长方形面积。

此处“弧田”并非弓形，实际上是指上述长方形。“弧田”二字可能是“方田”的笔误。今以意校正。

“方田”也好，“弧田”也好，未必是以“所”作为单位的名称，同时在刘注里也找不到例证，而钱校本把“所”字与上句连读，恐未必符合刘徽的原意。

“以弦乘矢”是弧田术的用语。上述九十六个三角形都是弧田的内接三角形，因而可能借用弧田术的用语，既是借用，按理应冠以“所谓”二字。也就是说，这里“所”字应连下读。今校正。

六

［原文］（圆田术下）角径亦皆一尺。

［校订］ 角径亦皆二尺。

“角径”是圆内接正六边形的长对角线。由前文“自然从角至角，其径二尺”可知，“角径亦皆二尺”。同时，若圆的半径为一尺，则“角径”应为二尺。各版本皆讹作“一尺”，今校正。

七

［原文］（圆田术下）以六觚之周十二而一可也。

［校订］ 以六觚之周自乘十二而一可也。

若仅就钱校本的字面而论，显然是有错误的。若按前文来说，此处似应是“以六觚之周自乘十二而一可也”。

若是省文，此句当是“以六觚之周可也”，不应是“以六觚之周十二而一可也”。其中既有“十二而一”四字，可见脱落“自乘”二字。今以意校补。

八

［原文］（宛田术下）圆锥见幂与方锥见幂，其率犹方幂之与圆幂也。

【校订】圆锥见幂与方锥见幂，共率犹圆幂之与方幂也。

根据刘注惯例，前后文理应对应。今将"方"、"圆"二字互换。

九

【原文】(宛田术下)按方锥下六尺，则方周二十四尺。

【校订】按方锥下方六尺，则方周二十四尺。

由前注文"假令方锥下方六尺"可知，此处当是"方锥下方六尺"。钱校本于"下"字后缺一"方"字，今补。

十

【原文】(弧田术下)与此相似，指验半圆之觚耳。

【校订】与此相似，指验半圆之幂耳。

传本作"半圆之弧"，钱校本则为"半圆之觚"。对照前文，可知"半圆之弧"于理不通，而"半圆之觚"也难于理解。今依殿本校正为"半圆之幂"。

十一

【原文】(方田章第三十八问之后)术曰：并中外周而半之，以径乘之为积步。此田截齐中外之周为长。并而半之者，亦以盈补虚也。此可令中外周各自为圆田，以中圆减外圆，余则环实也。

【校订】将这段术文及注文移至方田章第三十八问之前。

第三十七问已知数是整数，第三十八问已知数是分数，这一术文则是环田术的整数术文。按照本书的体例，这一术文应在第三十八问之前，第三十七问之后。今依殿本将术文移至第三十八问之前。

刘注"此田截齐"至"余则环实也"一段，系注释环田术的整数术文，也应在第三十八问之前。今依殿本将这段注文置于上述术

文之后第三十八问之前。

十二

[原文]（第三十八问之后）密率术曰

[校订] 术曰

李淳风以"密率"作为一个专用名词，刘徽则以"密率"为一形容词。不拘看作是何种词句，它与环田术的关系不大，所以按照殿本，将"密率"二字删去。

十三

[原文]（第三十八问之后）母互乘子，通全步，内分子。以中周减外周，余半之，以益中周。

[校订] 母互乘子，分母相乘，通全步，内分子，并而半之。又可以中周减外周，余半之，以益中周。

两个带分数，如果"母互乘子"后，便"通全步，内分子"，则不便"以中周减外周"。为了能减，在"通全步"之前似应有"分母相乘"四字。根据刘注可知，此处似有脱文。因此，依照孔刻本校补。

又由刘注可知，在"通全步，内分子"之后，也有脱文，依孔刻本校补"并而半之。又可"六字。

十四

[原文]（第三十八问之后）术曰：置中外周步数，……，即亩数也。

[校订] 将这段术文移于第三十八问之后，注文"按此术"之前。

按照本书的体例，这段带分数的环田术应在第三十八问之后，而刘注则应在术文之后。"按此术"以下的注文，显系注释这一术

文的注文。据此，按照殿本将这段术文移至第三十八问之后“按此术”之前。

十五

【原文】（经率术下）臣淳风等谨按：今有之义，……，是以径将所买之率与所出之钱为法、实也。

【校订】将这段李注移至刘注之后。

这段是李淳风的注文，按照惯例，李注应在刘注之后。今依李潢将这段注文移至“按此今有之义”一段之后。

十六

【原文】（经率术下）又按此今有之义。

【校订】按此今有之义。

“又按此今有之义”以下一段，由文字意义来看，疑是刘徽注文。李注应在刘注之后。今依李潢之说，将李注移于这段之后。因此，显见“又”字是一衍文，此依李潢校删。

十七

【原文】（经率术下）以所出之钱为实，实如法得一枚，钱不尽者。

【校订】以所出之钱为实，实如法得一钱，不尽者。

“实如法得一枚”，显然不合注者原意。又因术文为“实如法得一钱”，故知此处“枚”字是一衍文，今以意校删。

经率术所求都是钱数，术文又是“实如法得一钱”。而钱校本将“钱”字连下读，似无根据。今以意校改。

十八

【原文】（经率术下）等数而命分。

【校订】等数除之而命分。

任何数都不能以“等数”来命分。注文“等数而命分”是钱校本原文，于意欠通。今校正为“等数除之而命分”。

十九

【原文】（经率术下）术曰：以所买率为法，所出钱数为实，实如法得一钱。

【校订】将这段注文移至“经率”二字之下，注文“按此今有之义”之上。

按照本书体例，术文应在注文之前，注文当在术文之后。今依殿本，将这段术文移至“经率”之下，“按此今有之义”之上。

二十

【原文】（经术之下）术曰：以所求率乘钱数为实，以所买率为法，实如法得一。

【校订】将这段术文移至李注之前。“此术犹经分”之后。

按照本书体例，术文应在注文之前。今依殿本将这段术文移至李注之前，“此术犹经分”之后。

二十一

【原文】（其率下）术曰：各置所买石、钧、斤、两以为法，以所率乘钱数为实，实如法而一。不满法者反以实减法，法贱实贵。

【校订】术曰：各置所买石、钧、斤、两以为法，以所率乘钱数为实，实如法而一。不满法者反以实减法，法贱实贵。其求石、钧、斤、两，以积铢各除法实，各得其积数，余各为铢。

因刘注“如欲令无分”以下，系注释这一术文，由注文“其求石、钧、斤、两，以积铢各除法实，各得其积数，余各为铢者”

可知，术文当有“其求石、钧、斤、两，以积铢各除法实，各得其积数，余各为铢”二十二字。今依殿本校补。

按照本书体例，注文应在术文之后，今依殿本将这段术文移至“其率”二字之后，“如欲令无分”之前。

二十二

[原文]（反其率术下）法少者知经分之所得，故曰法少。实多者，知余分之所益，故曰实多。

[校订] 法少者，经分之所得，故曰法少。实多者，余分之所益，故曰实多。

“法少者”及“实多者”之下各衍一“知”字，今依殿本校删。

二十三

[原文]（反其率术下）故曰各以所得多少数乘法实，即物数也。其求石钧斤两，以积铢各除法实，各得其数，余各为铢者，谓以石、钧、斤、两积铢除实，石、钧、斤、两积铢除法，余各为铢，即合所问。

[校订] 故曰各以所得多少数乘法实，即物数也。

“即物数也”以下“其求石钧斤两”等四十八字，是钱校本由“术曰”之前移补于此。这种移补似无根据。这四十八字与“其率术”李注“其求石、钧、斤、两”以下几乎完全相同，可能是传抄者误抄于“术曰”之前。由本书惯例可知，注文是术文的注释文字，由于这段注文有“其求石、钧、斤、两，以积铢各除法实，各得其数，余各为铢者”词句，而术文中却无这样词句，这四十八字显系衍文。今依殿本校删这四十八字。

二十四

[原文]（术曰：列置爵数下）今有术，列衰各为所求率。

【校订】于今有术，列衰各为所求率。

按照惯例，并从戴震所校，在"今有术"前，校补一"于"字。

二十五

【原文】（术曰：列置爵数下）副并为法。以五鹿乘未并者，各自为实。实如法得一鹿。

【校订】将这段术文移置于"然则战国之初有此名也"之后，"于今有术"之前。

二十六

【原文】（返衰之下）术曰：列置衰而令相乘，动者为不动者衰。

【校订】将这段术文移置于"返衰"二字之后，注文"以爵次言之"之前。

二十七

【原文】（少广之下）今欲截取其从少，以益其广。

【校订】今欲截取其从多，以益其广。

"今欲截取其从少"，显然不合理，可能是"今欲截取其从多"之误。正如李籍《九章算术音义》所说"截从之多，益广之少"。今以意校改。

二十八

【原文】（开方术下）本当副置所得乘方。

【校订】本当副置所得成方。

"所得"是初商，"方"是黄甲之面，也是朱幂之袤。因欲除朱幂，而朱幂有二，所以刘注说"倍之为定法"。由此可知，这是取上文"方"即"初商"的两倍。据此，"所得成方"不误，但钱校本改

为"所得乘方"，似不妥当。今校改。

二十九

[原文]（开方术下李淳风注）本当副置所得乘方。

[校订] 本当副置所得成方。

钱校本作"所得乘方"，今依南宋本校正为"所得成方"。

三十

[原文]（开立圆术下）然则方周知方幂之率也；圆周知圆幂之率也。

[校订] 然则方周者，方幂之率也；圆周者，圆幂之率也。

"方周者"、"圆周者"，各本分别讹作"方周知"、"圆周知"。今以意校正。原因同本文第三条。

三十一

[原文]（商功术下）坚为筑土。

[校订] 坚谓筑土。

"坚为筑土"于意欠通。今依李潢校改为"坚谓筑土"。

三十二

[原文]（商功术下）墟率四为所有率。

[校订] 穿率四为所有率。

这一句是注释第一问的计算方法，注文应是"穿率四为所有率"。今依殿本校正。

三十三

[原文] 此积余有方寸中二分四厘五毫。

[校订]（第六问术文之下）此积余有方尺中二分四厘五毫。

由计算

$$\frac{16.3\text{ 尺}+10\text{ 尺}}{2}\times 6.3\text{ 尺}\times 132.1\text{ 尺}=10943.8245\text{ 立方尺}$$

以及前注文"八寸者，谓穿地方尺深八寸"可知，此处"此积余有方尺二分四厘五毫"之"方尺"误为"方寸"。今校改。

三十四

[原文]（方亭术下）约积三尺。

[校订] 得积三尺。

"约积三尺"于意欠通。由注文"得积九尺"、"得积一尺"可知，此处当是"得积三尺"。今校改。

三十五

[原文]（圆亭术下）惟以方幂四乘分母九。

[校订] 惟以方率四乘分母九。

前文有"方率四而一，得圆亭之积"。这里是求圆亭之积，可见"以方幂四乘分母九"之"方幂"应是"方率"。今校正。

三十六

[原文]（圆锥术下）大方锥之积合十二圆矣。今求一圆，复合十二除之。

[校订] 大方锥之积合十二圆锥矣。今求一圆锥，复合十二除之。

由计算可知，大方锥的体积等于十二个圆椎体积。若由大方锥求一圆锥体积，则应除以十二。注文两"圆"字下，各脱落一"锥"字。今校补。

三十七

[原文]（阳马术下）设阳马为分内綦，鳖臑为分外綦，虽或随修短广狭犹有此分常率。

[校订] 设阳马为分内，鳖臑为分外，綦虽或随修短广狭犹有此分常率。

钱校本从李潢之说，在“阳马为分内”下添一“綦”字，并使“綦虽或随修短广狭犹有此分常率”之“綦”字与上连读，显然不合刘注原意。今校改。

三十八

[原文]（阳马术下）于是中效其广，又中分其高。

[校订] 于是中效其广、袤，又中分其高。

四十一

[原文]（羡除术下）中锥离而为四鳖臑焉。故外锥之半亦为四鳖臑。

[校订] 中锥离而为四鳖臑焉。故外锥亦为四鳖臑。

既然中锥能离而分为四鳖臑，因之外锥也能离而分为四鳖臑。注文“外锥”下“之半”二字显系衍文。今校删。

四十二

[原文]（羡除术下）下两袤相等者。

[校订] 上、下两袤相等者。

钱校本于“下两袤相等者”之前，脱落一“上”字。今校补。

四十三

[原文]（羡除术下）末广之两旁，各一小鳖臑，皆与堑堵等。

[校订] 末广之两旁，各一小鳖臑，高、袤皆与堑堵等。

小鳖臑之高袤必须与堑堵之高袤对应相等，否则将不能成为末广两旁之小鳖臑。注文“皆与堑堵等”前，各本脱落“高、袤”二字。今以意校补。

四十四

[原文]（羡除术下）下广三尺，袤六尺，高七尺。

[校订] 下广二尺，袤六尺，高七尺。

根据计算，易知“下广二尺”误为“下广三尺”。今校正。

四十五

[原文]（刍童术下）两边堑堵各四。

【校订】两端堑堵各四。

由下文"两端堑堵各二"可知，此处"两边堑堵各四"之"两边"可能是"两端"的误文。今依李潢校改。

四十六

【原文】（刍童术下）并两旁三品棊。

【校订】并两方三品棊。

"并两旁三品棊"于意欠通。今依李潢校改为"并两方三品棊"。

四十七

【原文】（刍童术下）即四面六堑堵。与二立方并之为刍童积。

【校订】即四面六堑堵与二立方，并之为刍童积。

钱校本断句为"即四面六堑堵。与二立方并之为刍童积"。于意欠妥。今校正。

四十八

【原文】（刍童术下）上下广袤又各自乘。

【校订】上下广袤又各相乘。

由方亭术"上下方相乘，又各自乘"可知，"相乘"与"自乘"的意义有别。此处"上下广袤又各自乘"显然是错误的。今为之校正。

四十九

【原文】（商功章第二十五问下）于徽术当积三十二尺四百七十一分尺之四百五十七。

【校订】于徽术当积三十三尺四百七十一分尺之四百五十十

七。

根据计算，易于知“三十二尺”是“三十三尺”之误。今校正。

五十

[原文]（程粟一斛下）于徽术，此圆积一千五百七十寸。

[校订] 于徽术，此积一千五百七十寸。

这是按徽术计算㮚氏量的容积，应是“此积”，不是“此圆积”。虽然下文有“方积”、“圆积”二词，这是相对而说的语句。但下文也有“其积一千寸”及“积一千五百六十二寸半”两句。因此，校删上述之“圆”字。

五十一

[原文]（圆囷术下）合、龠皆有文字。

[校订] 升、合、龠皆有文字。

王莽铜斛是斛、斗、升、合、龠五量合成一体，此处既论及斛铭、斗铭，显见注文“合、龠皆有文字”前，脱落一“升”字。今校补。

五十二

[原文]（均输术下）以八日约除甲县，得一百二十五。乙丙各九十五。丁六十一。

[校订] 以八日约除甲县，得一百二十五。

注文“乙丙各九十五。丁六十一”与下文重复，可能是传抄之误。今校删“乙丙各九十五。丁六十一”十字。

五十三

[原文]（均输术下）一旬除乙，十三除丙，各得九十五。二旬除丁，得六十一也。

【校订】将这段注文移至于“于今有术”之前，“得一百二十五”之后。

在注文“而今有之，各得车数”之下，有“一旬除乙，十三除丙，各得九十五。二旬除丁，得六十一也”，二十二字，其意义与注文“以八日约除甲县，得一百二十五”是一致的。应该列在一起，但传本把这二十二字置于“各得车数”之后，可能是传抄者误置于此。今依李潢将这二十二字移至“得一百二十五”之后，“于今有术”之前。

五十四

【原文】（均输卒术下）臣淳风等谨按：为衰，于今有术。

【校订】臣淳风等谨按：各令居所及行道日数约县卒为衰，于今有术。

本文为“令县卒，各如其居所及行道日数而一，以为衰”。而钱校本的李注则是“为衰”。显然有误。今依戴震校补为“各令居所及行道日数约县卒为衰”。

五十五

【原文】（均赋粟术下）以乘里数者，欲知僦一车到输所用钱。

【校订】以乘里数者，欲知僦一车到输所所用钱。

因“输所”及“所用钱”都是专用名词，行文中不当省略，且刘注又有“欲知僦一车到输所所用钱”一句，足证这里脱落一“所”字。今依殿本校补。

五十六

【原文】（均赋粟术下）反衰注曰：先同其母，各以分母约其子曰反衰。

[校订] 反衰注曰：先同其母，各以分母约其同为反衰。

根据衰分章反衰术注文校正。

五十七

[原文]（均输章第四问术下）即凡输一斛余粟取佣所用钱。

[校订] 即凡输一斛粟取佣所用钱。

注文“余粟”之“余”字是一衍文，今校删。

五十八

[原文]（负笼术下）然则故所行者，今返率也。

[校订] 然则故所行者，今返率也。今所行者，故返率也。

由注文“今故所得返乘今返之率为实，而以故返之率为法”可知，李注既有“今返率”一词，也应有“故返率”一词。即是说，这里似有脱误。今依杨辉本校补“今所行者，故返率也”八字。

五十九

[原文]（络丝术下）所得青丝一斤练丝之数也。

[校订] 所得青丝一斤用练丝之数也。

由注文“所得即练丝用络丝之数也”、“所得即用练丝两数”、“所得即用络丝斤数也”可知，这里似脱落一“用”字。今依李潢校补。

六十

[原文]（络丝术下）虽各有率，不用中间。

[校订] 虽各有率，不问中间。

这里是“不用中间”，而恶粟术注文、持米出关术注文及持米出五关术注文却是“不问中间”，殿本及杨辉本也都是“不问中间”。由于“不问”比“不用”较为妥贴，故校改为“不问中间”。

六十一

[原文]（客马术下）以三百里乘主人均行日分子十三。

[校订] 以三百里乘客人均行日分子十三。

注文"并连此数得二十四分日之十三，则主人追及前用日之分也。是为客用日率也"。据此可知客人用日率为二十四分之十三。因此，"以三百里乘主人均行日分子十三"之"主人"实为"客人"之误。今以意校正。

六十二

[原文]（金箠术下）以本重乘其分母之数，而又反此率乘本重为实。

[校订] 以本重乘其分母之数，而又取此率乘本重为实。

术文有"以本重四斤徧乘列衰"一句，即是本重乘此率，即 16×4。而注文则是"此率乘本重"，即 4×16。如果以为注文和术文两处的叙述相反就加一"反"字的话，那就过于牵强了。今依宋景昌校改为"而又取此率乘本重为实"。

六十三

[原文]（金箠术下）势无损益，故为本存焉。

[校订] 势无损益，故惟本存焉。

本重乘以 16，再除以 16，仍然得到本重。注文"惟本存焉"不误，钱校本则为"为本存焉"。今依殿本校改。

六十四

[原文]（盈不足下）按盈者，谓之朓；不足者，谓之朒。所出率谓之假令。盈朒维乘两设者欲为齐同之意。

[校订] 将这段注文移至术文"实如法而一"之下，注文"据共

买物”之上。

按照惯例，注文应在术文之后，但这段注文却在术文之前。今依殿本，将这段注文移至术文“实如法而一”之后，注文“据共买物”之前。

六十五

【原文】（两盈两不足术下）按此术，两不足者，两设皆不足于正数。其所以变化，犹两盈。

【校订】按此术，两盈者，两设皆逾于正数；两不足者，两设皆不足于正数。其所以变化，则两不足犹两盈。

注文既然论及两不足，必然论及两盈。况且下文还有“其所以变化，犹两盈”一语，大典本、殿本在上文处都是“按此术，两盈”五字。因此，可证这里应有论及两盈的语句。戴震有鉴于此，便在“按此术，两盈”下，校补“者，两设皆逾于正数”八字，在“犹两盈”前，校补“则两不足”四字，今从之。

六十六

【原文】（垣高术下）即设差不盈不朒之正数。

【校订】即不盈不朒之正数。

“不盈不朒之正数”及“设差”都是专用名词，两者关系不大。注文“即设差不盈不朒之正数”之“设差”似是衍文。今校删。

六十七

【原文】（良马与驽马术下）得日数者，即设差不盈不朒之正数。

【校订】得日数者，即不盈不朒之正数。

注文“即设差不盈不朒之正数”之“设差”似是衍文。今校删。

六十八

[原文]（方程之下）此都术也，以空言难晓，故特系之禾以决之。又列中、左行如右行也。

[校订] 将这段注文移至术文“以右行上禾”之前，“列如右方”之后。

根据惯例，注文当在术文之后。由“又列中左行如右行也”可知，“此都术也”一段当在术文“以右行上禾”之前。今以意校正。

六十九

[原文]（方程术下）中左禾列如右方。

[校订] 中左行列如右方。

有上禾，中禾、下禾的名称，并无左禾的名称。由“列如右方”四字来看，显见“左禾”之“禾”字是“行”字之误。今校正。

七十

[原文]（方程术下）为齐同者谓中行直减右行也。

[校订] 为齐同者谓中行上禾亦乘右行也。

刘徽除按直除法运算外，并把齐同术的意义引而伸之。所以刘徽注前文为“先令右行上禾乘中行，为齐同之意”。据此，戴震便把“为齐同者谓中行直减右行也。”校改为“为齐同者谓中行上禾亦乘右行也。”

由齐同的观点来看，戴震校勘得比较正确。但钱校本却采用大典本“为齐同者谓中行直减右行也”一句。因为“中行直减右行”只是直减，并非齐同，所以“为齐同者谓中行直减右行”一语似欠妥当。退而言之，即使这里所谈是指“直除”，也应是“右行直减中行”，不当是“中行直减右行”。因此，今从戴校本。

七十一

[原文]（方程术下）故先以法乘中行而同之。

[校订] 故先以法乘其实而同之。

本文说"求中禾，以法乘中行下实"。"求上禾，亦以法乘右行下实"。可见求中禾、求上禾都是以法乘"下实"。这里是求中禾的注文，也应是以法乘实。因此，戴震将大典本"故先以法乘其通而同之"校改为"故先以法乘其实而同之"。钱校本则改为"故先以法乘中行而同之"。若是"乘中行"，所得则是中行一秉之实，并非中禾一位之实。因此，今从戴校本。

七十二

[原文]（甲禾二秉术下）而一以石为差实。

[校订] 而以一石为差实。

杨辉本讹作"而一以石为差实"。钱校本从之，并说："戴震将而一二字连在令相折除之下，遂以为是衍文而删去之，是不确当的"。钱校本对戴震的批评是正确的，但以为"而一以石为差实"是对的，则承其谬误了。根据第五、六问术文的注文"而以一斗八升为差实"、"而以六斗为差实"可知，此处当为"而以一石为差实"。今为校正。

七十三

[原文]（方程新术下）次以第二行减右行头位。

[校订] 次以第二行减右行。

根据计算，"次以第二行减右行头位"之"头位"二字，显系衍文，今删。

七十四

[原文]（方程新术下）次以第四行减左行头位。

[校订] 次以第四行减左行。

根据计算，“次以第四行减左行头位”之“头位”显系衍文，今删。

七十五

[原文]（以新术为此下）次以左行减第三行下位。

[校订] 次以左行减第三行下位。不足减乃止。

根据计算，“次以左行减第三行下位”下，似脱落“不足减乃止”五字。今校补。

七十六

[原文]（以新术为此下）又以减右行下位。

[校订] 又以减右行头位。

根据计算，“又以减右行下位”之“下”字，实为“头”字之误。今校正。

七十七

[原文]（以新术为此下）次以第二行减第四行及左行头位。

[校订] 次以第二行减第四行及左行头位。不足减乃止。

根据计算，“次以第二行减第四行及左行头位”下，似脱落“不足减乃止”五字。今校补。

七十八

[原文]（以新术为此下）又以减左行下位。

[校订] 又以减左行下位。不足减乃止。

根据计算，“又以减左行下位”下，似脱落“不足减乃止”五字。今校补。

七十九

【原文】(以新术为此下)次以第二行减第四行下位。

【校订】次以第二行减第四行下位。不足减乃止。

根据计算，“次以第二行减第四行下位”下，似脱落“不足减乃止”五字。今校补。

八十

【原文】(以新术为此下)各以本率今有之，求其本率。

【校订】各以本率今有之，求其所同。

原方程各项为正，若以物价代入，所得各项也都为正。所以下文乃有“如此则无正负之异矣”。若以物价代入“减行”，所得可能正负掺杂。不拘以前法或后法求物价，实际都是“择异同而已”。故知“求其本率”似为“求其所同”之误。今校正。

八十一

【原文】(木长二丈术下)七周乘三围是并合众句以为一句。

【校订】七周乘三尺是并合众句以为一句。

根据计算可知，各版本皆讹作“七周乘三围”。今校正为“七周乘三尺”。

八十二

【原文】(木长二丈术下)合朱、青，二十五。

【校订】合朱、青得二十五。

钱校本既按戴校本校改这句，则应为“合朱、青得二十五”。

八十三

[原文]（木长二丈术下）是故差之与并用除之，短长互相乘也。

[校订] 是故差之与并用除之，短长相乘也。

“相乘”与“互相乘”都是古算术语，然其意义却有所不同。前者是两数相乘，后者是四数交叉相乘。各本于“短长”下衍一“互”字。今校删。

八十四

[原文]（池方一丈术下）减此差幂于矩幂则除之。

[校订] 减此差幂于矩幂则余之。

可能因“馀”字与“除”字的行书形近，误“馀”为“除”。今校正。

八十五

[原文]（池方一丈术下）差为距幂之广，水深是股。

[校订] 倍差为此幂之广，水深是股。

“差”是出水一尺，也可看作句自乘的“矩幂之广”，但与后一句“水深是股”关系不大。同时，作为术文的注文，于意也欠通顺。戴震校改为“倍差为矩幂之广，水深是股”。可以看作是股弦差与句幂之差的广，即“减此差幂于矩幂”之广，而水深则是其袤。因此，校改为“倍差为此幂之广，水深是股”。

八十六

[原文]（池方一丈术下）故为矩而得水深也。

[校订] 故得水深也。

根据计算，易知“故为矩而得水深也”之“为矩而”三字是衍

文。今校删。

八十七

[原文]（户高多于广术下）开方除之得七尺，有余一不尽。

[校订] 开方除之得七，有余一不尽。

因前文为"假令句股各五，弦幂五十"，开方不可能得到七尺。显见"开方除之得七尺"之"尺"字是一衍文。今校删。

八十八

[原文]（户高多于广术下）其倍弦为广袤合。

[校订] 其倍弦为广袤合。

大典本为"其倍弦为广袤合"，又是赵爽成语。但钱校本改为"其倍弦为广袤合"，使人费解。今从大典本。

八十九

[原文]（户不知高广术下）连之者举表矩而连之。

[校订] 弦幂者举表矩而连之。

由前文"凡句股幂之在弦幂，或矩于表，或方于里"可知，此句当为"弦幂者举表矩而连之"。今校正。

九十

[原文]（户不知高广术下）两端之矩重于隅中。

[校订] 两矩之端重于隅中。

钱校本为"两端之矩"，于意欠通。戴震校改为"两端之廉"，也不恰当。今校改为"两矩之端"。

九十一

[原文]（二人同所立术下）故弦减之余为句率。

[校订] 故弦率减之余为句率。

通览全部注文，不难发现"故弦减之余为句率"之"弦"字下，脱落一"率"字。今校补。

九十二

[原文]（句中容圆术下）又以圆之大体言之。

[校订] 又以图之大体言之。

由于"图"字与"圆"字的形近，可能误"图"为"圆"。今校正。

九十三

[原文]（句中容圆术下）股中青必令立规于横广句股又邪三径均。

[校订] 股中青必合立规于横广句股又邪三径均。

可能因"合"、"令"二字形近而误。今改"令"为"合"。

《九章算术》争鸣问题的概述

李　迪

《九章算术》和刘徽是中国数学史研究中的重要课题，历来受到研究者们的重视，特别是《九章算术》更是如此。但是由于年代久远，又无详确文字记载流传下来，因此有关《九章算术》和刘徽的疑难问题颇多，长期以来众说纷纭，迄无定论。现就近二三十年来国内有关《九章算术》和刘徽的主要争论问题，加以整理，并保持各家的原意，不加任何评论，摄要列下，供读者进一步研究之参考。

一　《九章算术》之成书时代与作者问题

在《九章算术》的断代上，说法很多，主要者有以下一些：

1．西汉中期齐人作品说。此说为陈直提出[1]，并有如下几点理由：

① 《九章算术》卷六均输章的许多有关算题与西汉中期实行的均输法有密切关系，《史记·平准书》说："元封元年（公元前一一〇年），往往县置均输盐铁官，令远方各以其物贵时，商贾所转贩者为赋而相灌输，置平准于京师，尽笼天下之货物，贵即卖之，贱则买之，如此富商大贾，无所牟大利"。陈直据此认为："是均输法开始于武帝元封元年，九章已有均输篇，为武帝元封以后作品的明证"。

② 陈直根据《九章算术》"今有甲发长安，五日至齐，乙发齐，七日至长安"和"今有良马与驽马发长安至齐"两题指出："以上两则算题，都是假借说齐国到长安，或由长安到齐的日程，古人著书，所指皆是眼前事实，如鲁人称泰山，秦人称华岳之类，九章算题，自不能例外

这是西汉中期齐人作品的明证。"

③ 他又根据《九章算术》卷三有关五等爵算题指出："以上三则算题，都是假设说，各依爵次，分鹿，分粟，出钱。考汉书百官表，汉爵因秦制，一级曰公士，二级曰上造，三级曰簪裹，四级曰不更，五级曰大夫。宋代钱文子，清代钱大昕，皆谓汉爵八级以下为民爵，八级以上为官爵、官爵即不戍边，证之敦煌居延两地所出木简，戍卒的爵衔，皆是八级以下，与二钱的推断均合。九章所拟的算题，皆是指最低的五级民爵而言，这是西汉中期齐国人民作品的明证。"

④ 他又根据《九章算术》卷六"今载太仓粟输上林"题认为：这是说"由太仓令官署，送粟到上林苑的日程，也是指眼前事实而言，这是西汉中期齐国人民在京师作品的明证。"并说："其他各题，所说有关税事，有乘(？)传事，皆是行旅过程的问题。综合观之，可能是齐国的人民，充戍到京师后的作品，并不是传说是西汉张苍耿寿昌等大官僚的作品"。

然后，陈直又讲了"九章算术在汉代古器物上的记录"、"西汉齐人在学术上的百家争鸣"和"从九章算术能看出西汉中期内郡一部分物价"三个问题，作为"九章算术是西汉中期齐国人民的作品"的旁证。

2．西汉宣帝时、即公元前一世纪前半期成书说。此说为李继闵所主张[2]，提出如下八点理由：

① 从《九章算术》的内容，如测量土地、征收税赋、摊派徭役、工程管理以及执行一系列经济政策等方面来看，因实际需要"而由官方组织搜集、编纂的数学专著"，其成书时期当是汉宣帝时代。

② 现传本《九章算术》中所叙述的有关赋税制度、官名、地名以及均输等秦汉时期的社会问题，在汉宣帝时皆已完全具备。

③ 在刘徽的"九章注序"所列的《九章算术》的删补者中，耿寿昌是最后一个。据《汉书·食货志》记载："宣帝即位，……时大司农中丞耿寿昌以善为算，能商功利，得幸于上。"可见耿寿昌研究和删补《九章算术》当在宣帝即位(公元前73年)前后。

④ 《后汉书·马援传》有马续(约公元70—141年)"十六治诗，博

览群籍，善九章算术"的记载；此后史书中还有郑玄（公元127—200年）、刘洪(公元158—183年)1)等人通《九章算术》的记叙。说明《九章算术》在上述诸人之前确已完成。

⑤《汉书·艺文志》著录有"许商算术二十六卷、杜忠算术十六卷"又《广韵》卷四中有"九章术，[汉]许商 杜忠，[吴]陈炽，[魏]王粲，并善之"的记载。后者断定《九章算术》是先于许商、杜忠《算术》的作品，而许、杜的《算术》是在汉成帝河平三年(公元前26年)尹咸校数术之前撰写的。

⑥ 从秦始皇统一度量衡后，直到汉平帝元始年间(公元1—5年)王莽当权时令刘歆修正度量衡，颁发标准量器"律嘉量斛"，才把斛、斗、升发展为"五量"："斛、斗、升、合、龠"(《汉书·律历志》)。《九章算术》中的度量衡无一例外地采用斛、斗、升，未见使用"合"、"龠"。例如将"二斗一升六合"仍繁记为"二斗一升，五分升之三"(见"粟米"，第三题)。可见《九章算术》成书是在汉平帝之前。

⑦ 由"律嘉量斛铭"推知，我国在汉平帝时圆周率已采用3.1547；而《九章算术》中凡遇周径计算都一律遵循"周三径一"的"古率"，由此证明《九章算术》在此之前业已完成。

⑧ 现存"居延汉简"中尚保存有《九章算术》"粟米"题残简一枚；而"居延出土之简，就其有年号的来说，起自汉武帝太初三年(公元前102年)，迄于东汉光武建武七年(公元31年)"(《居延汉简甲编》编辑后记)。由此可见，《九章算术》在东汉初年之前早已流传到我国西北边郡，其成书年代当远早于此。

此外，李继闵还对其他几种主张稍作批驳。

3．原始的《九章算术》至少和《周髀算经》同时成书说。此说是李俨于1955年所提出[3]，其理由是：现在所流传的《周髀算经》和《九章算术》都不是原来的书籍，都是经后人修改和补充过。与《周髀算经》同时或可能先已有《九章算术》，现在还不能确定。因为现在流传《周髀算经》，在卷上有"陈子曰：……此皆'算术'

1) 此年代指刘洪学术活动年代，而非生卒年代。

之所及"的话。此外《汉书·律历志》说："数者一十百千万也，其法在'算术'，宣于天下。"这两处所说的"算术"有人以为就是原始的《九章算术》。又因为周公1)是当时的政治家，是需要算术的，同时因为《周礼》有"周公作九数"的记载，便以为《九章算术》是周公所作的。还有"周公作九章之法，以教天下"的传说。后来《九章算术》经魏刘徽(公元263年)编注，变成比较确定的定本。由此，李俨认为：原始的《九章算术》至少是和《周髀算经》同时，即公元前100年前后的作品。并且，无论如何是当时政治家所需要的算学书，是没有疑问的。

4．莽新时刘歆所完成说。此说系李迪于1956年在一篇论文的注中所提出[4]，他首先指出：《九章算术》绝非出于一人之手笔，这是大家所公认的，所以在研究其完成时代应分作两步，即最初的创作年代和最后完成的年代。所谓"最后完成年代"系指刘徽注解时所具的形态，根据以下三点理由，他认为此书是莽新时刘歆所完成：

① 现传本《九章算术》所记与汉时社会有关之问题，西汉时皆已具备

② 刘歆是莽新时代的学者和数学家，曾与其父刘向校对和整理过当时所能搜集到的书籍，而《九章算术》原始本他必见过，并加整理为定本，这是很自然的。

③ 东汉时期，刘洪(158--183时人)、马续(约90—141时人)和郑玄(127—200)都学习过《九章算术》，这证明此书已成定本，而无人再加增补了。

5．东汉初期或公元一世纪成书说。主张此说者颇多，有的说一世纪末，如钱宝琮[5]；有的说东汉初期，如钱宝琮[6,7]、白尚恕[8]等；有的说一世纪后期，如许莼舫[9]。其中提出论据的是

---

1) 周公，为周武王之弟，公元前十一世纪人。《周髀算经》卷上开头一句为"昔者周公问于商高"，后来因此成为与数学有关的政治家。

钱宝琮，他在[6]中说：《九章算术》的编纂年代大约在东汉初期。”并且指出：“到东汉时期，郑众、马融等都为‘九数’作了注释。东汉末郑玄《周礼注》引郑众说：‘九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要，今有重差、句股。”事实上，郑众所说‘九数’中的‘均输’已是汉武帝太初元年以后的赋税制度，决不是《周礼》九数原有的一个细目。‘方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要’大概是西汉末传统算术的主要纲目，‘今有重差、句股’说明数学有了新的发展。传本《九章算术》将句股代替旁要，它的编纂年代当在郑众注《周礼》的‘九数’(约公元五〇年)之后。《后汉书·马援传》说，马续‘善《九章算术》。马续是马援的侄孙、马融（公元七九——一六六年）之兄，他的生年约在公元七〇年前后。马续研究《九章算术》大概在公元九年前后。根据上述史料，我们认为《九章算术》的编定年代在公元第一世纪的后半个世纪，而各章的主要内容在第一世纪初期已具备了一定的成就。”在钱宝琮主编的《中国数学史》([7])中更进一步把上述理由归纳为以下六条：

① 《九章算术》方田章，田亩面积以二百四十方步为一亩，衰分章问题有公士、上造、簪裹、不更、大夫五级爵位，这些都是战国时期秦国的制度，而秦朝、汉朝沿用。均输问题中有长安、上林、太仓等地名，更能证明这些问题的写成时代是在西汉初年之后。

② 衰分章第五题和均输章第四题都是以“算”数表示各地区丁口的多少。高帝四年(公元前203年)“始为算赋”(汉代所行的丁口税)。以上二题的写成无疑是在高帝四年之后。均输章第一题到第四题是四个实行均输法的计算问题。汉武帝太初元年（公元前104年）郡国始置均输官，施行均输法。这四个问题的写成自然是在太初元年之后。

③ 《汉书·艺文志》没有著录《九章算术》。班固的《汉书·艺文志》是依刘歆的《七略》写成的。由此可证《九章算术》的编成还在刘歆《七略》之后。

④ 公元50年前后(汉光武帝时)郑众注释《周礼》“九数”时，“句

股"还没有被安排到"九数"中去，可见包含句股章在内的《九章算术》的编成不会在公元50年以前。

⑤ 《后汉书》马援传说，他的侄孙马续"十六治诗，博观群籍、善《九章算术》"。马续是马严之子，马融(公元79—166年)之兄，他的生年约在公元70年前后。他研究《九章算术》大概是在公元90年前后。此后，第二世纪中郑玄(公元127—200年)"通九章算术"，第三世纪初，赵爽《周髀注》说"施用无方，曲从其事，术在九章"。公元第二世纪以后，《九章算术》的存在是无可怀疑的。

⑥ "章"字的意义，古今有显著的变化。古代诗歌以一段为一章，例如《诗经》"关雎五章，章四句"。语录以一节为一章，例如《论语》二十篇，每篇有若干章。法律以一条为一章，例如刘邦入关，"与父老约，法三章耳"。依照"章"字的古义，一章的字数很少，和现在的"章"字不同。按照《九章算术》的丰富内容，在前汉初年应称为"算术九篇"而不应称为"九章"。

因此钱宝琮等根据以上理由，特别是第四、五两条理由，认为《九章算术》的写成大约在公元50年到100年之间，并且基本同意过去孙文青所提马续是《九章算术》的编纂者的主张。

6．公元一百年左右或东汉中期成书说。此说与前说相近，在时间上更具体些。前述李俨曾主张原始的《九章算术》至少和《周髀算经》同时，这是上限，下限没有提出。六年之后的1961年，他和杜石然共同指出："根据研究的结果来看，至迟在公元后100年(东汉永元十二年)左右的时候，《九章算术》就已经形成了现在流传本的这种样子。"[10]1963年他们又认为：《九章算术》的成书时代和作者，"现在都还得不出非常确切的回答。据现有的资料来推断，它至迟是公元后一世纪(东汉中期)时候的著作"。[11]但由于著作体例的限制，他们未能提出具体论据。梅荣照也认为《九章算术》是"约公元100年"的作品[12]，同样未讲理由。

7．秦汉五百年陆续完成说。此说为沈康身所提出，他在一

篇文章中说："《九章算术》"就是秦汉五百年间陆续完成的数学著作，一度曾经秦火焚毁，汉时又为张苍、耿寿昌等重新编写，其中仍多经验公式。"[13]但是沈康身也未提出立论之理由。

还有其他一些说法，这里不再罗列了。

二　刘徽的时代和籍贯问题

刘徽是我国历史上杰出的数学家之一，但是对于他的生平事迹至今了解甚少，只有《晋书·律历志》和《隋书·律历志》有相同的记载说："魏陈留王景元四年，注《九章》……"，景元四年相当于公元263年。因此，关于刘徽的生活时代和籍贯，也有不同说法。但有时同一人的主张往往也有变化，不过大体上可归纳为以下两说：

1. 刘徽为魏晋人说。主张此说的有钱宝琮、李俨、杜石然、梅荣照。1957年钱宝琮说："《九章算术》有魏末晋初刘徽的'注'(约公元263年)"[14]。1963年他更进一步指出："《九章算术》方田章圆田术注和商功章圆囷术注中都论及"晋武库中有汉时王莽所作铜斛"。《隋书·律历志》论历代量志引商功章注，说"魏陈留王景元四年(公元二六三年)刘徽注《九章》"。我们根据这些资料，认为刘徽是魏、晋时人。"[15]1964年，根据差不多同样的理由，钱宝琮等又认为"说刘徽是魏晋时人，大概是正确的。"[16]李俨、杜石然……于1964年也有类似主张，把刘徽定为三国时人[17]

绍庚也说刘徽是魏晋之际人[19]。

2．三国时魏人说。持此说者有杜石然和李迪二人，杜石然在1954年的一篇论文中，说“刘徽是三国魏时人，他的生卒年代等事迹，在现有的材料中找不到详细的记载”[20]，和以前他与李俨的提法略有不同。李迪于1960年也提出“刘徽是三国时代魏人”的看法，并且认为刘徽是三国时山东人，他的理由如下[21]：

① “《隋书》写道：‘魏陈留王景元四年（263）刘徽注九章商功云……’，宋刻本《九章算术》每卷开始均题‘魏刘徽注’四个字，这些都说明刘徽注《九章》是在魏。其在《九章算术序》中说：‘徽幼习九章，长在详览，观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意，是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。’此证刘徽给九章作注时，是在他成年以后的事情。唐王孝通也说‘魏朝刘徽’。以上都证明刘徽是三国时魏人。当然可能生在汉末，死在晋初，但无论如何他绝大部分时间是在魏度过的。”

② 又“《宋史》卷105称：‘封……刘徽淄乡男’。当然这话不完全可靠，但也不应完全否认。而淄乡当指山东之临淄一带，当时正属魏

$\frac{157}{50}$，相当于3.14。长期以来人们都称此值为"徽率"。不过这个分数是由去掉奇零小数化成的，实际上为$3.14\frac{64}{625}$（＝3.141024）。在中国数学史研究中，一般对"徽率"没有异议，都认为是刘徽所创造。但对$\frac{3927}{1250}$的创立者，则有不同看法，归结起来有以下三种态度：

1．只提"徽率"，不提$\frac{3927}{1250}$。持此态度者主要有四人，即李俨、严敦杰、杜石然和何章陆(洛)。最早者为李俨，三十年代初他说"刘徽只以$\pi=3.14$入算"，在论证时也止到圆内接正九十六边形[22]。后来在一些论著中[23,24,30]都是如此。他和杜石然合作的两书中也都未提$\frac{3927}{1250}$一事[25,26]。严敦杰于1957年的著作中，说："刘徽(263)从圆内正六边形起算，算至正96边形，求得$\pi=3.141$"。并且继续说："刘徽还说：'$3.14\frac{64}{625}<\pi<3.14\frac{64}{625}+\left(3.14\frac{64}{625}-3.14\frac{584}{625}\right)$。'"[27]何章陆于1963年的一篇文章中指出："刘徽计算出$\pi=3.14$或$\pi=\frac{157}{50}$，并指出这样的圆周率还是不够精确的"。[28]至于为什么不提$\frac{3927}{1250}$，上述各家先后均未提出理由。

2．$\frac{3927}{1250}$的创立者非刘徽而为祖冲之说。明确主张此说的有余宁生、余介石(宁生之父)、孙炽甫和李迪四人，并且都提出了理由。但最初李俨也有这个意思，他曾说："至$\pi=\frac{3927}{1250}$之求法，

冲之注《九章》亦言之”，并仿刘徽的割圆进行推求[29]，然似未肯定。下面介绍各家的主张。

(1) 余宁生、余介石的主张[30]。余宁生说：“请人李潢撰九章算术细草图说，认为刘徽九章注中的‘晋武库中汉时王莽所作铜斛’以下的一大段，是祖冲之说的。现代中算史家李俨和钱宝琮两先生，当初都以为李潢的看法是正确的。但后来钱先生又否认了这种说法，认为‘……周率 3927/1250 或 3.1416，实为刘徽所发明……’[31]。以前他们认为九章注中有‘晋武库中’数字，而在‘徽编纂九章算术时，魏尚未亡，不应称晋武库也’，[32]但是后来钱宝琮又说：‘徽注撰于景元四年(公元 263 年)，其时司马昭已封晋公，翌年加封晋王，又翌年司马炎篡魏，称晋帝。徽所见之王莽铜斛，为晋武库中物，实无可疑。若是祖冲之语，则当云宋武库(或齐武库)，不当仍称晋武库矣。’[31]我以为他所说的两个论证，至少是不充分的。第一，历史上除了在割据的局面中，私人是不可能有武库的，何况在封建‘朝廷辇毂’下。就是说刘徽看见王莽铜斛时是在司马氏夺位前二年(实则并没有根据能证明是在注书那一年看见的)，而那时司马氏早已权势逼人，在位的皇帝也有‘司马昭之心，路人皆知’的忿语，事实上魏武库确已成为晋武库，但是在夺位以前，表面上还是要掩饰一下的，决不会自称晋武库。刘徽又怎样敢在那个时候公然笑之于书，明目张胆说是晋武库呢？或者可以说在晋夺位以后，刘徽改写的，那更是‘查无实据’，不足为信了。第二，祖冲之诚然是在宋武库(或齐武库)中看见了王莽铜斛，但是他确然知道这是魏晋武库中的遗物，所以还是称‘晋武库’，以明古物的来源，这是很可能的。我还可以举出一个正面的论证，据畴人传引晋书律历志和九章算术，列举刘徽求周率的评草，明明有‘故还就一百九十二觚之全幂三百一十四寸以为圆幂之定率，而弃其余分’一语总结。假如刘徽曾求到 1536 边形，得出 3.1416，纵使算草太长而没有记载，

但决不会没有一句话提到的。所以我认为还是李潢的看法妥当些”。余宁生还设想了祖冲之求得 3.1416 的方法。

余介石在余宁生的论文之后加了一段“补记”，现录于下：

“宁生写好这篇稿子，寄交中华书局后，我从川大图书馆借得商务版丛书集成本九章算术。我遍查全书卷一方田内，有 π 计算的地方十条，卷四少广内有二条，卷五商功内有八条，都是取 3.14 的(第 82 页‘圆囷’条中‘高一丈三尺三寸少半寸’一语，与结果不合，据原书用 $\pi=3$ 回求，应为 $133\frac{1}{3}$ 寸，据徽注用 $\pi=3.14$ 回求，应为 133.336……寸。商务版丛书集成本宋杨辉撰‘评解九章算法’[景定二年，1261]第 85 页，清戴震[1724—1777]撰九章订讹，对此都未加订正)。此外，这书附有唐李籍撰九章算术音义，内‘嘉量’条(见 174 页)谓‘魏陈留王景元四年，刘徽注九章商功曰……’一段，求大司农斛及王莽斛，皆系用 $\pi=3.14$ (这书第 82 页谓‘王莽铜斛，于今……径一尺三寸六分八厘二毫’，而李注作‘径一尺三寸六分八厘七毫’)(隋书卷十六律历志第十一律历上，也作七毫)。我按九寸五分五厘折合，13.687 寸化得 14.332 寸，与钱宝琮：中国算学史上卷 38 页所推求的数字相合，可证‘二毫’有误。又李籍音义有‘徽术’条(见第 173 页)，也说‘徽术……以一百五十七乘径，五十而一，即周。此本于刘徽，故曰徽术’。由此可以确证刘徽并未求出 3.1416”。

(2) 孙炽甫的主张[33]。他认为 $\pi=\frac{3927}{1250}$ 虽然见于刘徽“九章算术注”中，但这一数值的记叙是从“晋武库中”所藏汉时王莽铜壶说起的，“南齐书”称祖冲之也注过“九章算术”，则 $\frac{3927}{1250}$ 或即祖冲之修正徽率而得。并且提出以下理由：

① 首先，从时间上来考察，徽“注”序文的年代是魏景元四年(公

元 263 年)，则注此术的时间可能还要早些1)，当时魏尚未亡，刘徽似不能称“晋武库”。祖冲之为东晋亡了以后新起之刘宋时代的天算家，于过去晋的武库中见该铜斛(或知该斛得自晋武库)，因而评论之，可能在注“九章”时就写了进去。祖冲之称“晋武库”，和现在的人称清宫为“故宫”有同样的意味。而且，莽斛当年按郡数铸就一百余只颁行天下，今故宫博物院内还保藏着一只，虽说晋武库于惠帝元康五年(公元 295 年)曾遭火灾，以及后来又遭“八王之乱”等等，但于南朝之际，该斛于世间尚不至于绝无，则当时冲之所见之斛，必属东晋武库之遗物。

② 其次，祖冲之与戴法兴辩难时曾说过：“至若立圆旧误，张衡述而弗改，汉时斛铭，刘歆诡谬其数，此则算氏之剧疵也”。《隋书·律历志》又有“祖冲之以圆率考之，此斛当径 1.436192 尺，庣旁一分九毫有奇，刘歆庣旁少一厘四毫有奇，歆算术不精所致也”的记载；唐初李淳风注“九章”，又说：“……祖冲之以其不精，就中更推其数，……攗摭诸家，考其是非，冲之为密，故显之于徽术之下”。由此可见，冲之确曾再注过“九章”，则今传本徽注文内从“晋武库中”的一段修正值的议论，似是祖冲之的话，可能是被后人窜入刘徽“注”里而混淆起来的。

③ 此外，还有一最有力的论证，即：在“九章”徽“注”中，需用 π 计算之题凡 20 处，“方田”内 10 条，“少广”内 2 条，“商功”内 8 条，于各算题中都用 3.14 入算，而并未用过 $\frac{3927}{1250}$ 即 3.1416，如系刘徽继续发现较精之率，何以竟不一用？于理似说不过，很难想象他是恐应用不便而弃置的，因为 $\frac{3927}{1250}$ 即 3.1416 运用并不太繁，即使怕繁，何竟一例也未演？由此可见，刘徽并未求出 3.1416。

④ 或谓 $\frac{3927}{1250}$ 系印度数学家阿多婆罗(Aryabhata、公元 476—?)所首创，其实不然，他出生时祖冲之已快五十岁了，阿多婆罗所用之圆周率 $\frac{62832}{20000}$ $\left(\text{以 16 约之即}\frac{3927}{1250}\right)$，似有借鉴的嫌疑。这一史实，亦可

---

1) 因该段注于《九章》第一章“方田”第 32 问之后，按写作习惯推测，这段注文可能比其余八章的注文写得早些。——孙炽甫原注。

作为祖冲之求得$\frac{3927}{1250}$的一个旁证。

孙炽甫根据以上的分析，认为$\frac{3927}{1250}$显然并非刘徽或其他数学家所创，而似祖冲之修正徽率所获得的近似值。

（3）李迪的主张[34]。他首先认定祖冲之确实注解过《九章算术》，然后他举出四条理由，论证$\frac{3927}{1250}$的作者是祖冲之：

① 刘徽注"九章"在魏时已经完成，唐初王孝通说过"魏朝刘徽"，今传本"九章"每章的开头均题有"魏"字，而书中的"晋"字也绝不是后改的。说明刘徽是魏人，他注"九章"是在魏，而不是在晋。

② 刘徽与祖冲之都见王莽铜斛：刘徽说："王莽铜斛于今（魏）尺深九寸五分五厘，径一尺三寸六分八厘七毫，于徽术计之，于今（魏）斛为容九斗七升四合有奇，此魏斛大而长，王莽斛小而短也"。由此可见，刘徽不仅见过王莽铜斛，而且进行过校核。但入晋以后他是否又见过此器很难断定，如果说他在魏时见到此斛而当时没有进一步推求圆周率，入晋以后又想起此器才加几段注？似于理不合。如果说刘徽能在晋武库中见到王莽铜斛，当然是晋的大官，但在《晋书》中却没有刘徽的传记，这一点也是说不过去的。而祖冲之是东晋以后宋齐的大天算家，且供职于宋齐，与皇室要人颇有来往，因而他有到宋齐武库的可能。王莽所造铜斛一百多只颁行天下，宋齐时当不致绝迹，《九章算术》明明记载："晋武库中有汉时王莽铜斛，……于今律历老同，亦魏晋所常用，今祖疏王莽铜斛"数语，为祖冲之所记。并且对此斛记述甚详，是证其在（东）晋武库中亲自见过，由此亦可推得在"方田"章所记"晋武库…"一段应为祖冲之写的，结果求得$\frac{3927}{1250}$一值。这个数值比徽率精密得多，当他注"九章"就写了进去，且很得意地说："若此者，盖尽其纤微矣！"李淳风所谓"显之于徽术之下"就是指的这个意思。

③ $\frac{3927}{1250}$的最早应用者是祖冲之而不是刘徽，因为在现传本《九章算术》刘徽注中有20条用π的问题，均用$\frac{157}{50}$或3.14入算，而根

本没用过 $\frac{3927}{1250}$ 或 3.1416。并且刘徽在求得 3.14 之后作了结语："…故还就一百九十二觚之一全幂三百一十四寸，以为圆幂之定率，而弃其余分1)"。这说明刘徽既未求得 $\frac{3927}{1250}$ 也未用过它。但祖冲之曾用 3.1416 考核过王莽铜斛，这就有力地证明了 $\frac{3927}{1250}$ 的创始人是祖冲之而不是刘徽。

④ 宋李籍《九章算术音义》中"徽术"条称："徽术，以五十乘周，一百五十七而一，即径。以一百五十七乘径，五十而一，即周。此率本于刘徽，故曰徽术"。这说明李籍只认为刘徽求得 $\frac{157}{50}$ 一率，而没有另外的圆周率值。

李迪认为，以上四点足以证明圆周率$\frac{3927}{1250}$的首创者不是刘徽而是祖冲之。

3. $\frac{3927}{1250}$的求得者为刘徽说。持此说者颇多，如钱宝琮、许莼舫、王守义[35]、白尚恕[8]、华罗庚[36]、何绍庚[19]、梅荣照[12]、沈康身[13]和励乃骥等。许莼舫起初也认为刘徽只求得$\frac{157}{50}$，而$\frac{3927}{1250}$是祖冲之继续用刘徽割圆术求至 1536 边形而得$\frac{3927}{1250}$[37]，但是后来他又改变了看法，认为$\frac{3927}{1250}$不是祖冲之求得的，而是刘徽所求得[38]。在上述诸人中明确提出理由的有钱宝琮和励乃骥两家。现分述于下：

（1）钱宝琮的主张。他在 1955 年的一篇文章中说：在《九章

---

1) 这句话中的"幂三百一十四寸"是指圆的面积，但刘徽假定圆径为二尺，由此求得 $\pi=3.14$。

算术》注文中由$\frac{157}{50}$到$\frac{3927}{1250}$的叙述语气连贯，“不象是两个人的手笔”，李淳风等以为$\pi=22/7$比$\pi=157/50$尤为精密。钱宝琮认为：所谓“显之于徽术之下”的是在“徽术”之后添上“密率”算法，并不是说，在刘徽“注”之后补充祖冲之的注文。然后提出了三点理由[39]：

① 刘徽《九章算术注》的自序作于魏景元四年，即公元263年，晋朝建立于265年。在晋朝初年，刘徽的《九章算术注》可能还没有完成，“晋武库”以下一段注文，也可能是后来补作的。刘徽在晋初的武库中看到刚搜罗到的王莽铜斛，说明“晋武库中”是很自然而且必要的。祖冲之一定看不到晋朝的武库的，尽管他颇有研究，却未必有看到王莽铜斛的机会，即使他在别处看到过，也不会提“晋武库”三字的。

② 周率3927：1250比157:50精密得多。所以刘徽在提出这个周率之后，便自鸣得意地说：“若此者，盖尽其纤微矣。”如果创此率的人不是刘徽而是祖冲之，无论如何，都不会道出“尽其纤微”四个字的。又，依据毛氏汲古阁影宋抄本，李淳风等注释有“周径相乘，数难契合。徽虽出斯二法，终不能究其纤毫也”一段话中的“二法”就是刘徽的圆周率，可见李淳风等是承认3927:1250为刘徽所创设的。可惜传刻本《九章算术》依据戴震的校勘，把“出斯二法”改为“出斯一法”，使后来的读者很容易受到蒙蔽。

③ 印度古代数学家用$\sqrt{10}$与62832:20000两个近似值，第二个值等于3927:1250，是刘徽所创设，见于刘徽的《九章算术注》中，可以作为印度采用刘徽注本《九章算术》的证据。如果说3927:1250是祖冲之所创设，第五六世纪印度数学家Aryabhata是不会看到的。同时，在印度古代数学中，为什么从来没有提起祖冲之的约率和密率呢？由此也可以证明3927:1250的确是刘徽的一个圆周率。

钱宝琮还进一步论述了他认为刘徽求得3927:1250的步骤。

(2) 励乃骥的主张[40]。他认为圆周率值$\frac{3927}{1250}$为刘徽所创造，因而同意钱宝琮的结论，而不同意孙炽甫和李迪的看法，在[40]

中专有一节“$\frac{3927}{1250}$圆周率为刘徽创造的评议”，提出四点理由：

① 刘徽注九章算经的时间。《隋书·律历志》只有说魏陈留王景元四年刘徽注九章商功，并没有他的自序作于景元四年。古人给书作序不象现在这样，在后面一行写明年月。所以这景元四年不能决定就是刘徽写自序的年月。另外，陈留王曹璜是晋泰始元年（公元265年）由司马炎封的，很明显，在景元四年还没有陈留王这个称呼。因此想魏陈留王景元四年注九章商功语句，当在刘徽自序里面，说明他那时候是注九章商功，因这篇序文有“陈留王”三字，很明显的是他入晋以后，将《九章算术》注文全部完成后写作的。晋左思作三都赋要十年，这九章的注需要做许多岁时，亦很必要。由此，励乃骥认为“李迪、孙炽甫两氏说在魏时已注解完了，是不正确的。”至于《九章算术》每卷开始均题“魏”字，是唐李淳风所加的。

② 九章算经中注文“在晋武库中，汉时王莽作铜斛……”一段文字的作者。励乃骥认为这段注文的作者是刘徽，既不是李淳风，更不是祖冲之。他指出九章商功的注中“祖疏”是“粗疏”之误，不能把“祖疏”理解为“祖冲之所说”，而应作“粗略抄录”解，刘徽所录王莽铜斛铭文确是比较粗略的。另外，自称所撰作的文章，在语法习惯上是称名而不通姓。“至于李迪所说淳风显于徽术之下的密率乃是$\frac{22}{7}$率，而不是$\frac{3927}{1250}$率，从李淳风在各题计算的结果，可以证明这话是不正确的。”再从语气和前后文联系起来看，此段注文确是刘徽。

③ 刘徽在九章算经中各题的计算为什么不用$\frac{3927}{1250}$率？刘徽在注中后段将结束语句里已经说明“举而用之，上法为约耳”。就是说在实际运算时，以上面的法$\frac{157}{50}$为简便。其实不要说魏晋时代，即现今计算时，π的数值只要用到小数点后第二位或用$\frac{22}{7}$率就够了。况刘徽还这样说过“若但度田，取其大数，旧术为约耳”。这里的旧术是指$\pi=3$而不是3.14，这说明计算田亩或其他的实际运算应用，以3.14便当实

用，已是精密。又查刘徽用$\frac{157}{50}$率计算在«九章算术»计有32处。又刘徽对王莽铜斛率虽没有说出赞美的话，但他不批评他的不准确，而只说与他的术所计算出的数相近，盖与刘歆（王莽铜斛的监造者）同是推翻古率周三径一的。但祖冲之以他的密率考核刘歆率，便批评数术的不精。刘歆考核王莽铜斛是用$\frac{355}{113}$率，而不是$\frac{3927}{1250}$率，这可以从下列运算得到证实。

$$\frac{10\pi}{4}(10\sqrt{2}-2\times0\cdot109)^2=1620$$

这里用$\pi=3.14159265$或$\frac{355}{113}$，而不是$\frac{3927}{1250}$或3.1416。

④ 励乃骥还提出另外四点理由，如对李籍«九章算术音义»中关于"此率本于刘徽故曰徽术"的不同解释；用印度数学史说明只有刘徽求得$\frac{3927}{1250}$才能在四五世纪传至印度，因为用过$\frac{3927}{1250}$的印度数学家普黎沙（Pulisa）生于公元300年，比祖冲之早生一百二十九年，不能采用祖冲之的结果。

根据以上四点理由他认为：足以证明$\frac{3927}{1250}$圆周率的创造人，不是祖冲之，而确是刘徽。

四 "缘幂势既同，则积不容异"的创建及命名问题

为了解决球的体积计算问题，我国数学家付出了很多劳动，到公元五六世纪间为祖冲之父子彻底解决。«九章算术»"开立圆术"李淳风注中引录了祖暅的一段非常精彩的话，其中包括"缘幂势既同，则积不容异"这一著名原理。祖暅在解决球积问题时明确用到了这条原理，此点已无疑问。问题是在祖氏父子以前的刘徽是否已经知道这条原理。目前有三种不同看法，但同一个人在不同时间内，往往看法是不同的，下面只能大体归一下类。

1．“祖暅公理”说。李俨在1954年出版的著作中[41]，有专节讨论“梁祖暅之开立圆术”问题，并指出：“合盖形：半圆球体积＝4:π”，这个结论是根据：“此两形截面积或体积之比，并为4:π”而得到的，因此他已知“幂势既同则积不容异”这一原理。但未明确提到刘徽是否已涉及此原理。

杜石然第一次明确提出“祖暅公理”这一名称[42]，他说：“我国古代的祖暅公理，也就是现代一般人所说的卡瓦列利（Cavalieri）公理”，“卡瓦列利是17世纪上半纪意大利的数学家，他的生卒年代是1598—1647年。”杜石然又说：“本文的主要目的就是在于要说明：不是卡瓦列利，而是祖暅首先用到这一公理的事实。”然后他根据李淳风的注文详细论述了祖暅是怎样使用“幂势既同，则积不容异”的原理的。他在文后建议把“卡瓦列利”公理或定理，改为祖暅公理或定理。后来，中学数学教科书等都采用了这一名称。

李俨和杜石然合作的一本书中[43]，一方面讲到刘徽关于“圆台:方台＝圆面积:外接正方形面积＝3(π):4”和“圆锥体积:外接方锥体体积＝直接圆面积:外接方面积”，并进一步指出了球的体积与其外切“牟合方盖”的体积之比为π:4。但没有进一步指出刘徽的思想。他们指出，祖氏父子用到了“幂势既同，则积不容异”原理，这一定通常称为卡瓦列利公理或定理，认为是意大利数学家卡瓦列利(Cavalieri，公元1598—1647年)首先引用的，这是不符事实的。祖冲之早在卡瓦列利之前一千年就用到了它，它应改称为祖氏公理或定理。

严敦杰认为：“祖暅的方法是由刘徽（公元263年）开端的，刘徽已知道这些求球积的一些原理，……祖暅用了他有名的定理出色地完成了这项工作。”并详细进行了论述[44]。

1957年，钱宝琮也持同样看法[45]，并指出：祖氏父子在这方面的工作，“他们的成就比圆周率的计算更加伟大。”还说：他

们根据“幂势既同，则积不容异”的原则，认识到牟合方盖的体积，同一个立方体内挖去两个正方锥的体积相等。这和在他们一千年之后，意大利数学家卡伐里列（Cavalieri）所提出的公理相当。

2．刘徽已认识到“幂势既同，则积不容异”原理或更一般的原理说。李俨在1958年认为[46]，刘徽已经知道“幂势既同，则积不容异”的原则，根据是刘徽在《九章算术》卷五“商功”章计算羡除体积的一段注文：“按阳马之棊，两斜，棊底方。当其方也，不问旁角而割之相半可知也。推此上连，无成不方。故方锥与阳马同实。角而割之者，相半之势，此大小鳖臑，可知更相表里，但体有背正也。”并指出：“这说明等高等底的阳马和方锥等积。”

许莼舫一方面认为把“卡伐列利公理”改为“祖氏公理”才最恰当，另一方又详细讲到刘徽的工作，并承认刘徽已早有类似公理[47]。他说：“再回顾到刘徽的牟合方盖体积和内切球体积关系的比例式，它的来历是曾经应用过这样的公理：‘两个等高的立体，如果被任何相同高度的平面横截所得的两个截面面积（S 和 S'）的比是一个常数，那么这两个立体的体积（V 和 V'）的比也等于这个常数。’”就是 $V:V'=S:S'$。这个公理实际可以说在《九章算术》书中早已应用过，例如正四棱柱（或正四棱锥）和它的内切圆柱（或圆锥）的体积比，应该等于正方形和它的内切圆的面积比。我们再把祖氏公理和 $V:V'=S:S'$ 这个公理来比较一下，显然祖氏公理只是后者的一个特例，就是前者当 $V:V'=S:S'=1$ 时的特殊情况。照这样看来，祖氏公理的表述虽然是祖冲之父子，但是类似的公理却早在很久以前就被应用了。”许莼舫在最后以底注的形式声明说：“这最后一段文字，是得到了钱宝琮教授的提示以后补写的”，从而说明钱宝琮也有同样的看法。在他主编的《中国数学史》中[48]，也说：“从上面所引的刘徽注中，我们不能不体会到他已用如同十七世纪意大利数学家卡瓦利里

(Cavalieri)的方法来解决圆锥体和球的问题了。"

吴文俊在一篇论文中[49]，首先提出了"刘徽原理"："斜解一长方体，所得阳马和鳖臑的体积的比恒是二比一。"然后讲到"祖暅原理"："幂势既同，则积不容异"。关于球的体积的解决，他认为应分为三步，第一步是"牟合方盖"的提出，且有"$\frac{1}{8}$球体积：$\frac{1}{8}$方盖体积$=\pi:4$"。（另两步略）并且指出："按牟合方盖是刘徽所引入的，第一步的结果实质上也已经为刘徽所求得。事实上，在《刘注》中，他已经多次应用了祖暅原理来求曲面围成立体的体积，例如从方堡壔求圆堡壔，从方锥求圆锥，从方亭求圆亭，都已经使用这方法。祖暅的功绩，不仅在于具体求出了牟合方盖因而求出球的体积，更在于把实际上已知并且已经广泛应用的实践经验总结提高到一般原理的形式。是否应该把祖暅原理改称为刘祖原理，是可以商讨的。"

1978年，李迪也提出了类似看法[50]，他说：刘徽经过苦心钻研，找到了一条解决圆锥、圆台之类的体积的途径："他分别作圆锥的外切正方锥和圆台的外切正方台，结果发现：'求圆亭之积亦犹方幂中求圆幂'，圆面积与其外切正方形的面积之比为$\pi:4$，由此他推得：圆台（锥）的体积与其外切正方台（锥）的体积之比也是$\pi:4$。很显然，如果已知正方台(锥)的体积，即可求出圆台（锥）的体积。刘徽的这种比较简单的思想成为后来祖氏原理的重要前导。"因此，李迪建议把这条定理称为"刘徽定理"，并且指出："当着这个定理中那个比的常数等于一的情况下，就是有名的'祖氏原理'。在西方，一六三五年意大利数学家卡瓦列利才有了与祖冲之父子类似的思想，比刘徽晚一千三百多年，比祖氏父子也晚一千一百年以上。"

白尚恕也有类似的看法[8]，他说："关于'缘幂势既同，则积

不容异'一理，固然是祖氏父子所创，但是羡除术刘徽注说：'推此上连无成不方，故方锥与阳马同实'。这就是说，在等底等高的一阳马与一方锥中，作与底平行的截面，若处处截面都是等积的正方形，则阳马与方锥等积。实际上这就是'缘幂势既同，则积不容异'。刘徽所指只不过是两个直线型的立体，而祖氏父子所指乃是一直线型与一曲线型的立体。"因此，他认为"无妨称这一原理为刘、祖公理或刘、祖定理。"

3．还有些论文，在提法上介于上两者之间，如王守义[35]、沈康身[13]、何章陆[28]、梅荣照[12]等基本上都属这种主张。但也有些是由于文章内容的限制没有展开详细论述，他们大都承认刘徽关于"牟合方盖"的体积与其内切球的体积之比等于 $4:\pi$，或圆台（锥）与外切正方台（锥）的体积之比为 $\pi:4$，且同时提到祖暅的"幂势既同，则积不容异"。倾向性不如前两种看法那样明显。

此外，还有些其他方面的争论或不同看法，这里不再详述了。

参 考 文 献

[1] 陈直：《九章算术著作的年代》，《西北大学学报》(自然科学)，1957年第1期，第95—97页。

[2] 引自关于李继闵九章算术的形成一文，见《数学学报》，1975，18:4，第223—230页。

[3] 李俨：《中国数学发展情形》，《数学通报》，1955年7月号，第1—9页；又见《初等数学史》，1959年，科学技术出版社，第1—18页。

[4] 李迪：《中国古代数学家对面积的研究》，《数学通报》，1956年7月号；又见《初等数学史》，第96—102页。

[5] 钱宝琮：《中国数学史话》，中国青年出版社，1957，第8页。

[6] 钱宝琮：《算经十书·九章算术提要》，中华书局，1963，第83—84页。

[7] 钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，1964，第32页。

[8] 白尚恕：《我国古代数学名著〈九章算术〉及其注释者刘徽》，《数学通

报》，1979 年第 6 期(12 月)，第 28—33 页。
[9] 许莼舫：《中国代数故事》，中国青年出版社，1965，第 6 页。
[10] 李俨、杜石然：《中国古代数学史话》，中华书局，1961，第 13 页。
[11] 李俨、杜石然：《中国古代数学简史》，上册，中华书局，1963，第 47 页。
[12] 梅荣照：《刘徽<九章算术注>的伟大成就》，《科学史集刊》，1963，第 6 期，第 1—10 页。
[13] 沈康身：《纪念刘徽注“九章算术”1700 周年（263—1963)》，《数学通报》，1963 年 5 月号，第 6—10 页。
[14] 同[5]，第 9 页。
[15] 同[6]，第 85 页。
[16] 同[7]，第 61 页。
[17] 同[10]，第 15 页。
[18] 同[11]，第 84—85 页。
[19] 何绍庚：《割圆术和圆周率》，《中国古代科技成就》，中国青年出版社，1978，第 101—110 页。
[20] 杜石然：《古代数学家刘徽的极限观念》，《数学通报》，1954 年 2 月号，第 1—2 页；又见《初等数学史》，第 103—106 页。
[21] 李迪：《伟大的数学家刘徽》，《数学教学月刊》，1960 年第 1 期（总第 18 期)，第 29—31 页。
[22] 李俨：《中国数学大纲》，上册，商务印书馆，1933，第 31—35 页。
[23] 李俨：《中国算学史》，商务印书馆，1937，第 20—22 页。
[24] 李俨：《中国古代数学史料》，中国科学图书仪器公司，1954，第 54—55 页。
[25] 同[10]，第 16—17 页。
[26] 同[11]，第 84—89 页。
[27] 严敦杰：《中学数学课程中的中算史材料》，人民教育出版社，1957，第 74—75 页。
[28] 何章陆：《<九章算术>今读》，《浙江师范学院学报》，1963 年第 1 期，第 1—10 页。
[29] 同[22]，第 45—50 页。
[30] 余宁生：《祖国数学家在圆周率上的伟大贡献》，《近代数学概观》第四册，附录四，中华书局，1953，第 170—174 页。
[31] 钱宝琮：《中国算学史》上卷，中央研究院历史语言研究所，1932，第 45 页。
[32] 钱宝琮：《中国算书中之圆率研究》，《科学》，1923，8:2，第 114—129 页。

[33] 孙炽甫：《中国古代数学家关于圆周率研究的成就》，《数学通报》，1955年第5期，第5—12页。又载《初等数学史》，第110—125页。
[34] 李迪：《$\pi \doteqdot \frac{3927}{1250}$的作者和祖冲之的圆周率算法》，《数学通报》，1955年11月号，第20—22页。又载《初等数学史》，第125—130页。
[35] 王守义：《祖冲之氏缀术求"π"的我见》，《甘肃师范大学学报》(自然科学)，1962年第1期，第46—61页。
[36] 华罗庚：《数学是我国人民所擅长的科学》，《人民日报》，1951年2月10日。又载《给青年数学家》，中国青年出版社，1956，第5—10页。
[37] 许莼舫：《中算家的几何学研究》，中国青年出版社，1952，第48—49页。
[38] 许莼舫：《中国几何故事》，中国青年出版社，1965，第63页。
[39] 钱宝琮：《圆周率$\frac{3927}{1250}$的作者究竟是谁？它是怎样得来的？》，《数学通报》，1955年5月号，第4—5页。又载《初等数学史》，第106—109页。
[40] 励乃骥：《九章算经圆田题和刘徽注的今释》，《数学教学》，1957年6月号，第1—11页。
[41] 同[24]，第59—63页。
[42] 杜石然：《祖暅公理》，《数学通报》，1954年3月号，第9—11页。又载《初等数学史》，第131—135页。
[43] 同[11]，第97—98，110—115页。
[44] 同[27]，第78—83页。
[45] 同[5]，第84—87页。
[46] 同[22]，第54页。
[47] 同[38]，第72—78页。
[48] 同[7]，第70页。
[49] 吴文俊，《出入相补原理》，《中国古代科技成就》，1978，第80—100页。又载本书。
[50] 李迪：《我国历史上伟大的数学家 刘 徽》，《光明日报》，1978年3月31日。

略论《九章算术》理论体系之特色

李　继　闵

《九章算术》是流传现今我国最早的一部杰出的数学典籍，也是世界数学史上极为珍贵的古典文献。它总结了秦汉以前我国在数学领域的辉煌成就，开创了独具一格的理论体系，对中国古代数学的发展有着十分深远的影响。

探讨《九章》的理论和体系，是不能脱离对刘徽注的研究。《九章》的术文相当简略，其中许多数学思想与论证方法，后人只有从刘徽注中才能明瞭。在两千年前的古代，《九章》堪称巨著，其洋洋万言刻写在竹简上已非易事，自然不可能以更大的篇幅去阐发原理。刘徽九章注原序说：“算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子……至于以法相传，亦犹规矩度量可得而共，非特难为也。”可见在远古时代数学的原理许多是靠口授师传的。可是到了刘徽时代，“当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳”。刘徽有感于学术的后继乏人，才“采其所见，为之作注”的。他“幼习九章，长再详览”，“探赜之暇，遂悟其意”，可见其用力之勤，而他的探索在于“原其指趣”，“以究古人之意”。由此可知他的注释是力求比较忠实和准确地反映出我国古算理论的本来面目。诚然，徽注中有不少属于刘徽个人的出色创造，但他的理论无疑是对中算传统的继承和发扬。

任何一个民族的科学文化都有其产生发展的历史渊源，因而表现出迥然不同的风格和特点。古希腊的数学著作表述为逻辑的演绎体系，而我国古代以《九章算术》为代表的数学体系，则是以计算为中心的系统理论。

"算术"一词在我国很早便有使用。据《汉书·艺文志》记载，西汉时期的数学著作中有《许商算术》二十六卷，《杜忠算术》十六卷。在《周髀算经》中还有"此皆算术之所及"的话。可见西汉时期，算术即是数学的代名词。许慎的《说文解字》对"筭"(即算)的解释是："筭长六寸，所以计历数者"。说明"算"字的原意是计算用的算筹。那么，"算术"的本意自然就是用筹演算的原理和方法。通览《九章算术》全书二百四十六问，无一不是最终由演算来解决问题的，即使几何的内容也表现为与图形有关数量的计算。以算为主，这是我国古代数学最根本的特征。中国古代数学长期被称之为算学，以这个"算"字来命名，真可谓是"一语破的"。

计算的确是中国古代数学之擅长。十进位位置制记数法为我国之首创。大约从有文字记载的时期开始，我国便采用了这种简便的记数方法。殷代甲骨文和两周钟鼎文中的合文记数明显地含有位置制的意义。这一被马克思誉为"最美妙的发明"，再加上算筹工具的使用，无疑使我国古代的计算技术在世界居于遥遥领先的地位。

算筹在我国形成的确切年代已无从查考。从《老子》书中："善数者不用筹策"的论述来看，在战国时期算筹的应用就已经相当普遍。算筹在古代不仅是简便而准确的计算工具，而且对中算理论的发展起着十分重要的作用，以致可以把中国古算称为"筹算"。从《九章》中可以看出，筹算对古代的数系的扩充产生了积极的影响，分数与正负数的引进和它们的合理的表示法，在很大程度上受惠于筹式的演算。正是借助于算筹这一工具，在《九章》中建立了比率、列衰、盈朒、方程这样一些特定的数学模式，并形成了一套完善的程序化的演算方法，把古代的运算理论从"数"扩展到"式"的领域，构成一个相当完整的体系。可以说，筹是中国古算的象征，筹算是我国古代数学的基础。

一个以计算为中心的数学体系，其理论的重点自然在于发展

运算的对象（即数与式）和建立运算的法则。《九章》的全部理论基本上是以数和式为发展线索开展的。“方田”、“少广”主要是发展各种分数算法①。“粟米”、“衰分”和“均输”则是建立一套完整的比率理论②。“率”的概念在《九章》的理论中起着基础的作用。它的引进标志着数量关系的研究在《九章》中占有突出的地位。一组率（以及由此而发展的列衰、返衰）在筹算中排列成行，被看作一个进行演算的整体，这便是最简单最基本的筹“式”。（而对这种筹式引进了遍乘、通约、齐同三种基本演算，成为《九章》中一切“式”的演算的基础）盈不足术通过假设与试验，将一般应用问题化为特定的“盈朒”的形式③：

$$\begin{array}{l} \text{所出率} \\ \text{买　物} \\ \text{盈　朒} \end{array}\begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \\ y_2(\text{朒}) & y_1(\text{盈}) \end{bmatrix}$$

其中每行是一组率。因此“盈朒”这类筹式实际上是两组率的复合。“盈不足”可以说是比较复杂的筹式的演算。方程术把筹式的演算推向一个更高的水平。由实际问题而布列成的方程：

$$\begin{pmatrix} a_{n1} & \vdots & a_{21} & a_{11} \\ a_{n2} & \vdots & a_{22} & a_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn} & \vdots & a_{2n} & a_{1n} \\ c_n & \cdots & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{物率} \\ \text{实} \end{array}$$

刘徽指出“令每行为率”，表明“方程”是被看作由多组率组合而成

---

① 参看本书《中国古代的分数理论》。

② 参看本书《<九章算术>中的比率理论》。

③ 参看本书《盈不足术探源》。

的复杂筹式①。«九章算术»的方程章，则是讲述"方程"以及由方程求解而产生的正负数的演算法则。

从«九章算术»本文和刘徽注的研究中可见，秦汉时期所形成的演算体系取得了很高的理论成就。这首先表现在概念的科学性方面。«九章»及其徽注中关于分数、正负数、率和"方程"的定义都是十分精辟的。这些定义的一个显著的共同特点是，定义中蕴涵着对象的运算性质，从而使演算法则成为自然的逻辑推论，似乎有些公理化的意味，而刘徽关于分数与正负数的分类以及化异类为同类从而相并相消的思想又颇富哲理②。其次，«九章»的运算理论具有高度的概括性与系统性。率的概念与理论是贯穿«九章»中各种算法的一条总纲。"率"的概念是从古代最常见的成比例变化的量中抽象出来的，它被我国古代数学家巧妙地用来描述各种线性问题。«九章»中的分数、衰分、均输、盈不足、方程诸术中的筹式，都被当作一组率或几组率的组合，从而把一切"式"的演算都最终归结为率的三种基本演算。所以刘徽注云："乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎。"此外，«九章»的各种算法表现为固定的演算程序。这自然是和筹算的特点分不开的。筹在算板上可以任意摆弄，因而特别便于式的变换。我国筹算没有运算符号和等号，筹算过程表现为式的变形。因此，筹的"位置"具有重要的意义。筹算以位置来表示数量之间特定的关系，如果不排成固定的模式并规定演算的程序，必然会在复杂的演算中乱套，也不便于普及应用。这种模式化与程序化标志着古代筹算的完备与成熟。而正是模式化与程序化的要求，成为我国古代数学之所以建立方程算法和引进正负数在理论上的一个重要根源。

---

① 参看本书«〈九章算术〉与刘徽注中的"方程"理论»。

② 参见前面各注中所列诸文。

形与数的密切结合是《九章算术》理论体系的又一特色。《九章》包含有丰富的几何内容，分属于"方田"、"少广"、"商功"、"句股"等章，在面积、体积和句股理论方面取得了卓越的成就①。《九章》中图形的研究表现为数量的计算，它以长度、面积和体积等度量为主要对象，充分体现"以算为主"的特点。而形数结合突出地表现在几何方法与代数方法的相互渗透。求积理论中的相比法和句股术中的句股比率论②，使我国擅长的比率算法在几何领域中广泛应用，从而使我国古代测望之学达到了重差术的高度。而另一方面，几何的原理与方法被成功地应用于代数，《九章》中的开方术和二次方程的数值解法（带从开方法）都是来源于几何。甚至刘徽运用出入相补的几何方法获得了求整句股弦的一般法则③。数与形的这种美妙结合，使得中算在理论和应用两方面都获得了很大的成就。

中算家善于从错综复杂的数学现象中抽象出深刻的数学概念，提炼出一般的数学原理，而从非常简单的基本原理出发解决重大的理论关键问题。率的概念成为运算理论的统一基础；出入相补原理作为论证的普遍方法和许多理论的源泉；"幂势既同则积不容异"的原理成了求积理论的重要根据，刘徽所建立的"阳马居二，鳖臑居一"的原理成功地克服了体积理论的困难。这些数学成果的结晶充分显露出古代数学家卓越的理论创造能力。与西方相比较，中算理论具有高度概括与精炼的特征。我国传统几何学不讨论角的性质与度量，避开平行线与一般相似形的繁琐理论，而使古代测量理论建立在特殊的相似句股形理论之上。同样，中算传统几何不讨论一般三角形的求解，而代之以直角三角

---

① 参见本书《〈九章算术〉与刘徽的几何理论》。

② 参见李继闵《从句股比率论到重差术》。将刊《科学史集刊》。

③ 参见李继闵《刘徽对整句股术的研究》。《科技史文集（数学史专辑）》，上海科技出版社。

形的解法，形成了一套我国特有的句股术。中算家抓住理论的核心与实质，使理论简明扼要，这无疑是更便于理论的应用。

《九章算术》以算为主、形数结合的完整体系的形成，是与周秦以来中算理论与实际应用密切结合的特征分不开的。《九章》是以应用问题解法集成的体例编纂成书的。题目按应用范围和解题方法划分为九章。从篇章的名称来看，"方田"，以御田畴界域；"粟米"，以御交质变易；"衰分"，以御贵贱禀税；"少广"，以御积幂方圆；"商功"，以御功程积实；"均输"，以御远近劳费；"盈不足"，以御隐杂互见；"方程"，以御错糅正负；"句股"，以御高深广远，可见这种体例具有"应用数学"的浓厚色彩。《九章》的全部理论是以寻求各种应用问题的普遍解法为中心课题，这与古希腊欧几里得几何学追求逻辑的完美形成了鲜明的对照。

《九章算术》理论体系的全貌还有待于进一步发掘清理，对于这个体系的全面评价也只有期待于高明。不过，从对《九章》理论体系现有的初步清理来看，大概是可以纠正某些学者对中算理论的误解与偏见。由于受材料的限制和文字的隔阂，西方学者很难接触到中算典籍，更不用说深入探讨中国传统数学的特点。因而即便一些比较好的西方数学史著作对中国古代数学成就也未能给予足够的估计。同时，由于深受欧几里得几何体系的影响，对中国古算理论体系难免抱有成见。D. J. 斯特洛伊克的一段话清楚地说明这一点。他说："在一切古代东方数学中没有任何地方足以使我们发现我们所谓证明的任何企图。从未用过推理，而仅仅是列出某些规则来：'如此做，做这个'。我们无从知道定理被发现的途径：例如，巴比仑人怎样会熟悉了句股定理？现在存在着解释埃及人和巴比仑人获得他们的结果的几种尝试，但它们都是限于假说性的。对于我们这些被欧几里得的严格推理所教育的人，这整个的东方思考方法在最初似乎是惊异而又高度地令人不满。但是当我们认识到我们讲授给我们今天的工程师们和技术人

员们的数学大部仍是'如此做、做这个'的方式，而很少有严格的证明企图时，这种惊异就会消灭了。在许多中学中，代数学现仍被教成一堆公式而不是一种演绎的科学。东方数学似乎从未由它所由而生的几千年来技术学和行政问题的影响下解放出来①”。在这篇短文中，我们无意于贬低西方古代数学的成就，而旨在说明中国传统数学的特色。任何尊重历史事实而又不囿于偏见的学者，在他们认真研究中国古代数学史料以后，是会对中算家的理论成就及其对于世界数学发展的贡献作出公允的评价的。

参 考 文 献

[1] 梅荣照《十进位制，筹算和珠算》，《中国古代科技成就》，中国青年出版社，1978。

[2] 三上义夫著，林科棠译，《中国算学之特色》，商务印书馆，1933。

[3] 顾今用《中国古代数学对世界文化的伟大贡献》，《数学学报》，1975.3。

[4] A. П. 尤什凯维奇《中国学者在数学领域中的成就》，《数学进展》，1956.5。

[5] 钱宝琮主编《中国数学史》，科学出版社，1964。

[6] 李俨、杜石然《中国古代数学简史》，中华书局，1963。

[7] 斯特洛伊克著，关娴译，《数学简史》，科学出版社。1956。

[8] 李约瑟《中国科学技术史》第三卷，(数学)。

---

① 见斯特洛伊克著、关娴译《数学简史》，科学出版社，1956，第21—22页。

出入相补原理*

吴文俊

我国古代几何学不仅有悠久的历史，丰富的内容，重大的成就，而且有一个具有我国自己的独特风格的体系，和西方的欧几里得体系不同。这一几何体系的全貌还有待于发掘清理，本文仅就出入相补原理这一局部方面，就所知提出几点，主要根据是流传至今的以下各经典著作：

《周髀算经》(简称《周髀》)，

《九章算术》(简称《九章》)，

刘徽《九章算术注》(简称《刘注》)，

《海岛算经》(简称《海岛》)，

赵爽《日高图说》和《句股圆方图说》(简称《日高说》和《句股说》)。

田亩丈量和天文观测是我国几何学的主要起源，这和外国没有什么不同，二者导致面积问题和句股测量问题。稍后的计算容器容积、土建工程又导致体积问题。我国古代几何学的特色之一是，依据这些方面的经验成果，总结提高成一个简单明白看起来极不足道的一般原理——出入相补原理，并且把它应用到形形色色多种多样的不同问题上去。以下将列举这些不同的应用。

简单应用和比例理论

所谓出入相补原理，用现代语言来说，就是指这样的明显事

---

* 本文从《中国古代科技成就》(1978)第80—100页转载。

实：一个平面图形从一处移置他处，面积不变。又若把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和、差有简单的相等关系。立体的情形也是这样。

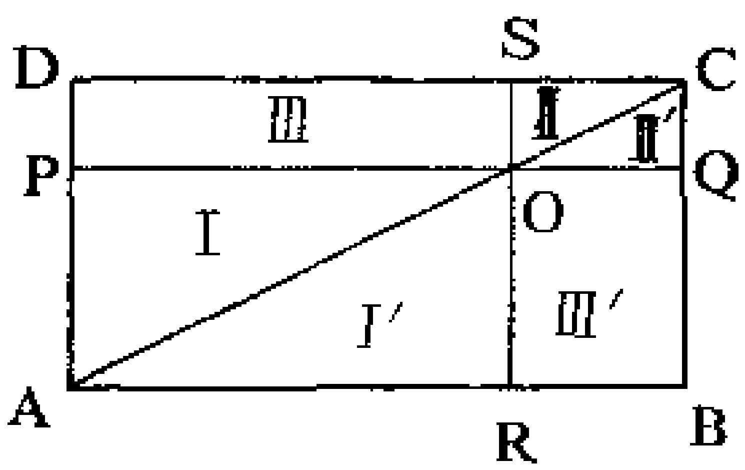


图 1

应用这一原理，容易得出三角形面积等于高底相乘积的一半这一通常公式，由此以定任意多角形的面积。作为另一简单实例，可以观察图 1，如果看作把 ΔACD 移置 ΔACB 处，又把Ⅰ、Ⅱ各移置到Ⅰ′，Ⅱ′，那末依出入相补原理有：

$$Ⅲ=Ⅲ', \square PC=\square RC\cdots\cdots(\text{指面积相等})$$

由此得

$$OP\times OS=OR\times OQ,\ PQ\times QC=RB\times BC,\ \cdots\cdots$$

因而 $AR:OQ=OR:CQ,\ AB:OQ=BC:QC,\ \cdots\cdots$

就是相似句股形 ARO 和 OQC、ABC 和 OQC 的相应句股成比例。并且可以导出其他相应部分的比例关系。

以上这些极简单的结果虽然没有在«九章»中明白说出，但是曾经多处用这些关系来解决各种具体问题，参看«刘注»。

测望术和重差理论

在«周髀»中，就有用两表测日影以求日高的方法，公式是

$$日高=\frac{表高\times表距}{影差}+表高.$$

见图 2，其中 A 是日，BI 是地平面，ED、GF 是先后两表，DH 和 FI 是日影。«海岛»改测日的高为测海岛的高，同图 AB 是海岛，H、I 是人目望岛顶和两表上端相参合的地方，于是日高公式成为：

$$\text{岛高}=\frac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表高}.$$

刘徽证明和所用的图都已经失传，但是据现存«日高说»和残图以及其他佐证，原证当大致如下：

由出入相补原理，得

$$\square JG=\square GB, \tag{1}$$

$$\square KE=\square EB, \tag{2}$$

相减得 $$\square JG-\square KE=\square GD,$$

所以 $$(FI-DH)\times AC=ED\times DF,$$

即 $$\text{表目距的差}\times(\text{岛高}-\text{表高})=\text{表高}\times\text{表距}。$$

这就得到上述公式。

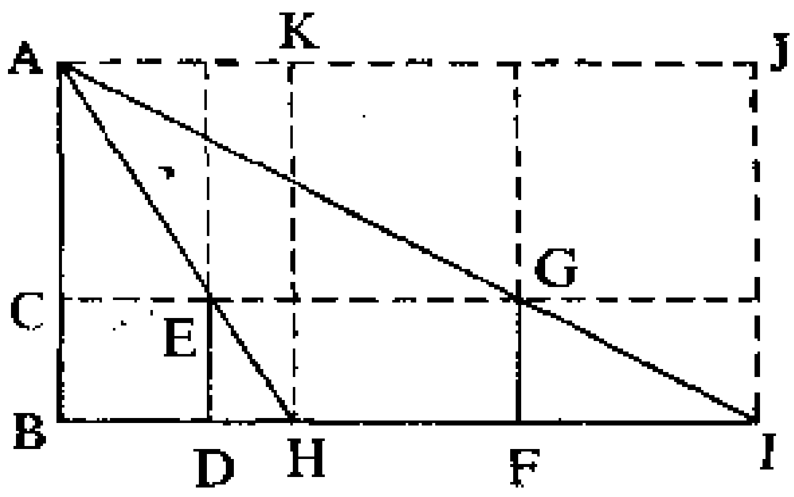


图 2

按«海岛»共九题都属测望之类，所得公式分母上都有两测的差，重差这一名称可能由此而来，其余八题公式都可依出入相补原理用和上面类似的方法证明，现在从略。

元朱世杰«四元玉鉴»中有和«海岛»完全类似的几个题，朱世杰对这些题的解法应该有古代相传下来的一定来历。依照朱对海岛一题的解法，我们认为原证比上面所示的可能稍复杂一些。如图 3，现在重作证明如下：

由出入相补原理除(1)、(2)外又有

$$\square PG=\square GD, \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)得

$$\square JN=\square EB=\square KE,$$

所以 $$IM=DH, \tag{4}$$

$$FM=FI-IM=FI-DH=\text{表目距的差}。$$

由(3)式就得到海岛公式。

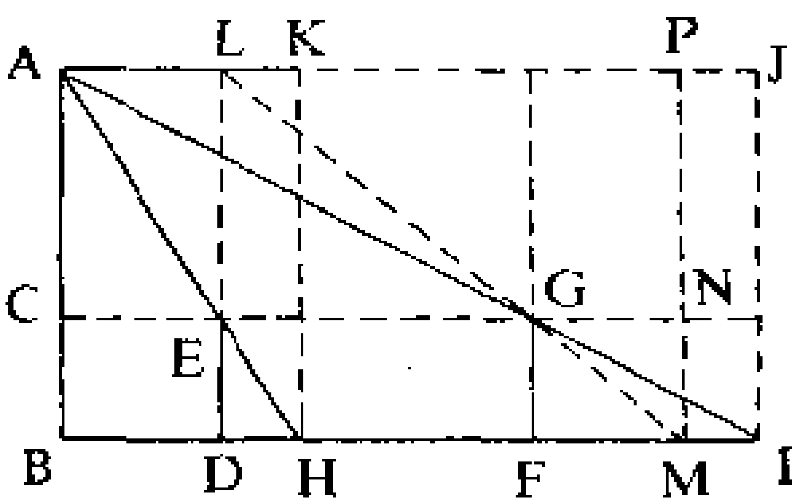


图 3

如果依照欧几里得几何体系的习惯证法，那就自然应该添一平行线 $GM' \parallel AH$，如图 4，再利用相似三角形和比例理论作证。清代李潢以及近代中外数学史家大都依这法补作海岛公式证明，这当然不是刘徽的原意，也和我国古代几何传统相违背。注意作平行线的时候，应有 $FM'=DH$，和前面(4)式相比，M 和 M' 的位置完全不同。

明末利玛窦来我国，他的主要学术工作之一是介绍欧几里得几何体系。他曾口授《测量法义》一书，其中载有和海岛题完全类似的一题。在他所作的证明中，需要在 FI 上取一点 M 使(4)式成立，再用比例理论作证，见图 4。按常理来说，利玛窦应该作平行线而取 M' 使得 $FM'=DH$，但是他一反欧几里得惯例而和我国古代传统不谋而合，颇使人迷惑不解。现在提出这一问题，希望大家共同探讨。

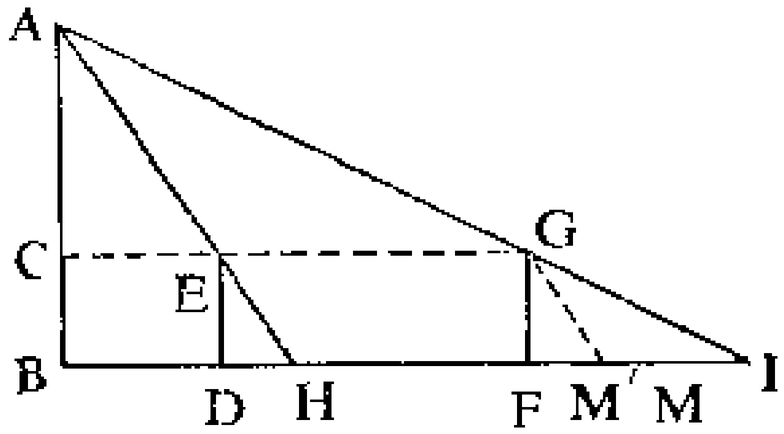


图 4

句股定理

在《周髀》和《九章》中，都已经明确给出了句股定理的一般形式：句^2+股^2=弦^2。虽然原证不传，但是据《句股说》以及《刘注》，都依出入相补原理证明，并且有遗留到现在可以用来作证的赵爽残图，这几方面互相参照，原证应该大致如下：如图 5，句股形是

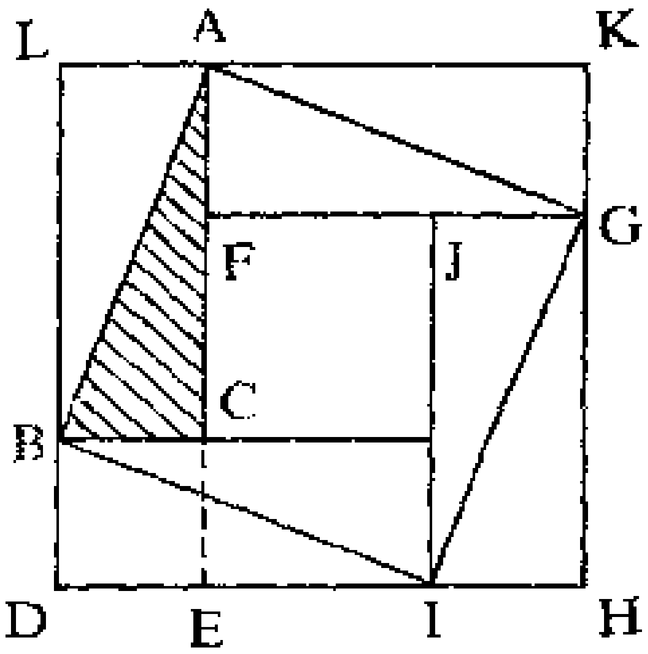


图 5

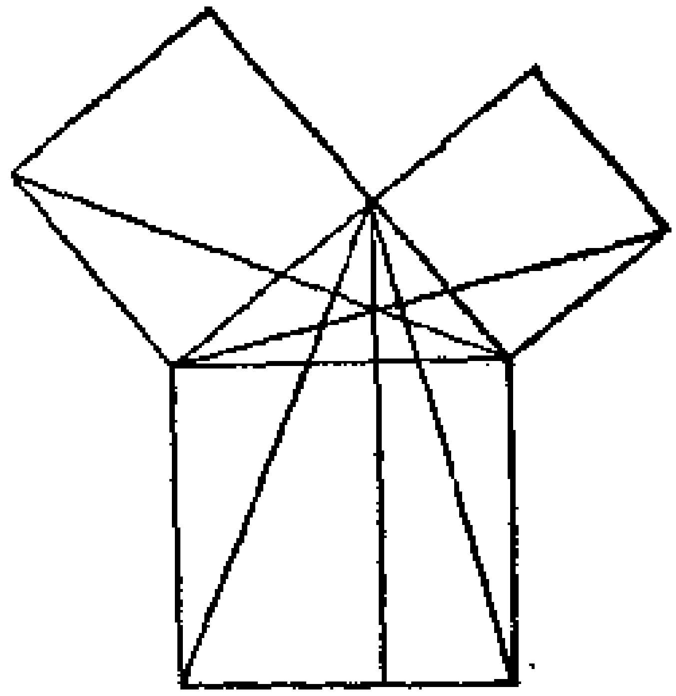


图 6

ABC，$BCDE$ 是句方，$EF\ GH$ 是股方，把二者的和 $DB\ CF\ GH$ 的 ΔBDI 移到 ΔABC，ΔGHI 移到 ΔAFG，就得到 $ABIG$ = 弦方^2，由此得到句股定理。

欧几里得《几何原本》中句股定理的证明如图 6 所示，其中要先证有关三角形全等形以及三角形面积的一些定理，为此要做不少准备工作，因而在《几何原本》中直到卷一之末出现这一定理，而在整个《几何原本》中几乎没有用到。而在我国，句股定理在《九章》中已经有多种多样的应用，成为两千来年数学发展的一个重要出发点，参阅以下各节和文末附表。在东西方的古代几何体系中，句股定理所占的地位是颇不相同的。

句、股、弦及其和差互求

句、股、弦和它们之间的和差共九个数，只须知道其中的两个就可以求得其他几个。除句、股、弦互求就是开平方之外，《九章》句股章中有不少这方面的问题：

1．知股弦差、句，求股、弦(五题)；

2．知句股差、弦，求句、股(一题)；

3．知股弦差、句弦差，求句、股，弦（一题）；

4．知股弦和、句，求股、弦（一题）。

各题都列出了一般公式，《句股说》的许多命题也属这一类，《刘注》还给出了证明，公式的来历和证明的方法都依据出入相补原理，有的也用比例原理作别证。试以句股章第十三折竹题为例。题设竹高已知，竹在某处折断，竹梢着地，着地处和竹根距离也已知。求折断处的高度，见图7。如果以着地处和竹根的距离作为句，就是从股弦和、句求股的问题，《九章》原文给出的公式是：

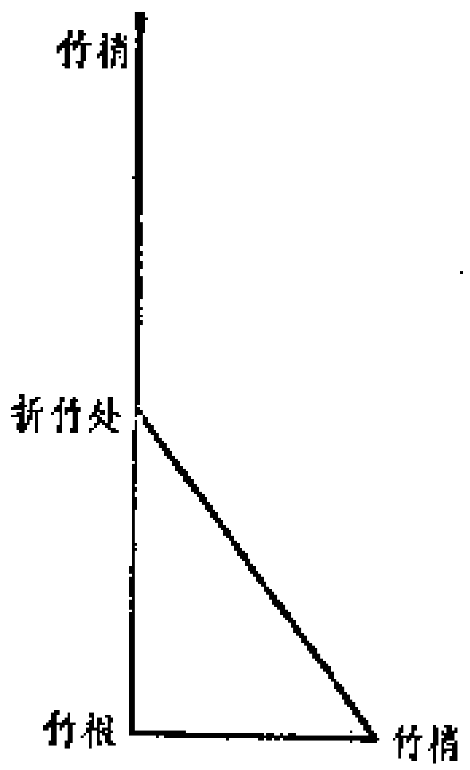


图 7

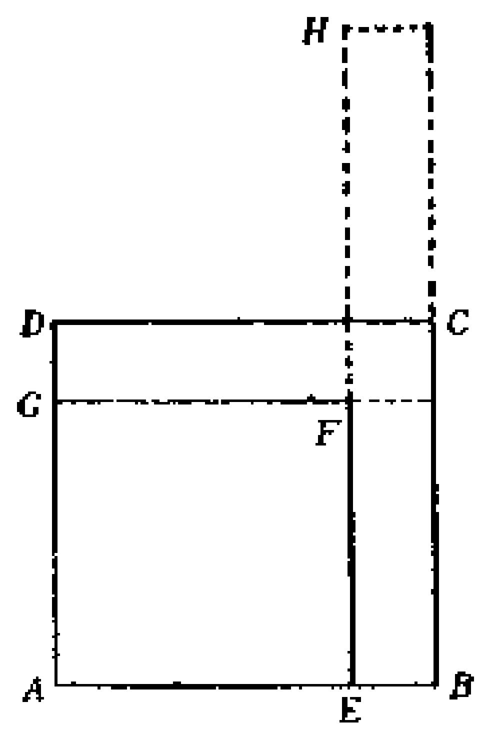


图 8

$$股弦差=句^2/股弦和,$$

《刘注》又给出了另一公式：

$$股=\frac{股弦和^2-句^2}{2\times股弦和}.$$

为了证明前一公式，可以考虑图8，其中正方形 $ABCD$ 和 $AEFG$ 的边各是句股形的弦和股。依句股定理曲尺形 $EBCDGF$ 的面积应该等于句^2。现在把 □FD 如图移到 □CH，那末依出入相补原理，□BH 的面积是句^2，而它的边长各是股弦和、股

弦差，就得到上面的前一公式。

另一公式的刘徽证明也相类似。试考察图 9，其中右下角曲尺部分面积依句股定理等于句^2，所以粗黑线围成部分等于股弦和^2—句^2。把长方形 I 移到 II，依出入相补原理，这一面积是斜线部分的两倍，就是 2×股×股弦和，由此就得到另一公式。

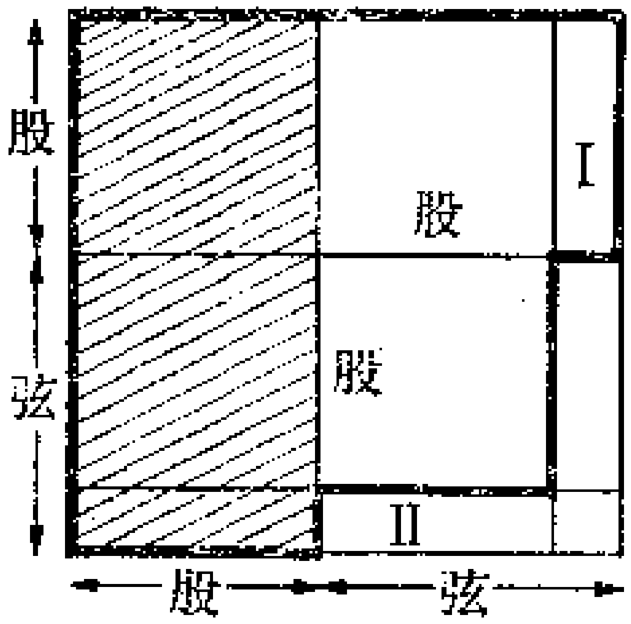


图 9

秦九韶公式

秦九韶《数书九章》中有一题是已知不等边三角形田地三边的长(称大斜、中斜、小斜，以下简记为大、中、小)，求田地面积。秦九韶的解法相当于下面的一般公式：

$$面积^2=\frac{1}{4}\left[小^2\cdot大^2-\left(\frac{大^2+小^2-中^2}{2}\right)^2\right].$$

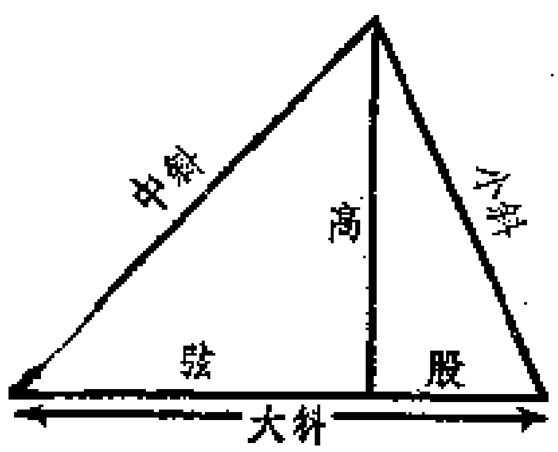


图 10

秦的公式来历不明，证明也失传了。现在补作一证如下：

作大斜上的高分大斜成两部分，作为句股形的股和弦，见图10。由于《九章》已给出三角形面积等于 1/2×高×大，所以问题归结为怎样求高，或怎样求股。由于

$$股弦和=大,$$
$$句^2=弦^2-股^2=中^2-小^2,$$

所以问题归结为怎样从股弦和、句求股。依上节的刘徽公式，得：

$$股=\frac{股弦和^2-句^2}{2\times股弦和}=\frac{大^2-(中^2-小^2)}{2\times大},$$

$$高^2=小^2-股^2=小^2-\left(\frac{大^2+小^2-中^2}{2\times大}\right)^2,$$

由此就得到秦的公式。

按秦公式的形式十分古怪，当是依某种思路自然引导到这一形式的。上面的证法颇为自然，也符合我国古代几何的传统特色，说它是原证，也是不无可能的。

在西方有所谓海伦公式(a、b、c 是三角形三边的长)：

$$三角形面积=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},$$

这一公式形式十分漂亮。正因为这样，如果已知海伦公式而再来推出秦的公式，将是不可思议的；相反，从秦的公式化简成海伦的公式，乃是比较自然的发展。

据此我们至少可以断言，秦的公式是独立于海伦公式而得来的。

关于海伦的生平，从公元前二世纪到公元后十世纪以后，数学史家聚讼纷纭。至于海伦留传到现在的著作，也已经人指出，历代都经过重新编纂，有所增改，已经不是本来面目。这是熟悉希腊数学史的应予澄清的事，这里就不考虑了。

开平、立方

从句、股求弦，先把句、股平方后相加，再开平方就得弦。因而句股定理的应用自然导致开平方的问题。事实上，«周髀»中已经给出了若干具体数目的平方根，而在«九章»中，更详细说明了开平方的具体方法和步骤。这一方法的根据是几何的，就是出入相补原理。试以求 55225 的平方根为例。这相当于已知正方形 $ABCD$ 的面积是 55225，求边 AB 的长，见图 11。按我国记数用十进位位值制。因 AB 显然是一个百位数，所以求 AB 的方法

就是依次求出百位数字、十位数字和个位数字。先估计（《九章》中用“议”字）百位数字用 2，因而在 AB 上截取 $AE=200$，并且作正方形 $AEFG$，它的边 EF 的两倍称为“定法”。把 $AEFG$ 从 $ABCD$ 中除去，所余曲尺形 $EBCDGF$ 的面积是 $55225-200^2=15225$。其次估计十位数字是 3，在 EB 上截取 $EH=30$，并且补成正方形 $AHIJ$。从 $AEFG$ 所增加的曲尺形 $EHIJGF$ 可以分解成三部分：□FH，□FJ，□FI，面积依次是 $30\times EF$，$30\times FG$，30^2，其中 $EF=FG=200$，所以从 $ABCD$ 中除去 $AHIJ$，所余曲尺形 $HBCDJI$ 的面积是

$$15225-(2\times30\times200+30^2)=2325。$$

现在再估计个位数字是 5，在 HB 上截取 $HK=5$，并补作正方形 $AKLM$，从 $ABCD$ 中除去后所余曲尺形面积和前同法应该是

$$2325-(2\times5\times230-5^2)=0$$

由此知 K 和 B 重合而 55225 的平方根恰好是 235。

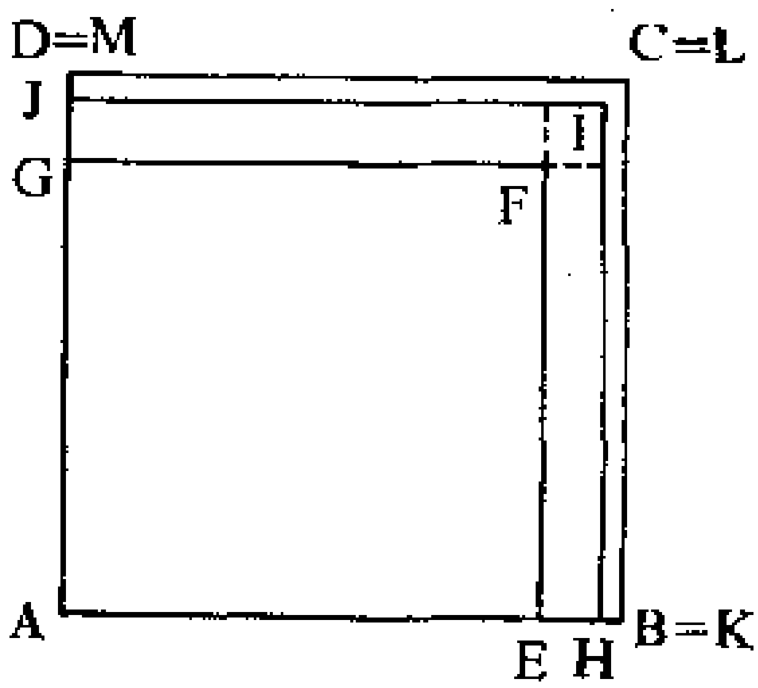


图 11

求立方根的方法和步骤和这相似，但是要把一立方体逐步进行分解，比平方根求法稍复杂，所依据的仍是出入相补原理。这在《九章》中也有详细叙述。

我国开平立方法来源很古，它的几何本质十分清晰，而且方法上可以看出我国独有而世界古代其他民族所无的位值制记数法的高度优越性。不仅这样，至迟到十一世纪中叶，我国就已经把开平立方法推广到开任何高次幂，就是所谓“增乘开方法”，并且出现了有关的二项式定理系数表，就是所谓“开方作法

本源图”。从这一方法的几何渊源看来， 如果说当时的我国数学家已经有高维方体和高维几何的雏影，似乎不是全无根据的。

解二次方程

在开平方的过程中，曾经出现象第74页图8中黑线部分那样的图形，其中 $2\times EF$ 称定法。开平方在求得 AE 后，其次几步在于从曲尺形 $EBCDGF$ 的已知面积求得 EB。现在把□DF移到□CH，那末依出入相补原理，□BH 面积已知，此外□BH的两边 EH 和 EB 的差就是定法 $2\times EF$，也有已知数值。因而求 EB 的问题可以转化为下面的问题：

(A) 已知一长方形(□BH)的面积、长阔差，求长阔。

反过来，这一问题的解法，可依开平方中第二步以下的方法求得，称为“开带从平方”。这在《九章》以来用下面的语句来表达：

(B)“以(长方形面积)为实，(长阔差)为从法，开方除之，得(阔)”。

以上“从法”一名，当来自开平方过程中的“定法”，“开方”一词也说明了它的来历。

下面的例取自《九章》，见图12。图中 $ABCD$ 是一方城，出北门北行若干步到 G 有木，出南门南行若干步到 F 再西行若干步到 H，恰可望见木 G，问题是求方城每边的长。据《刘注》的方法是依出入相补原理得□$EJ=2$□$EG=2$□$KG=2\times$北步$\times$西步。又□EJ 的长阔差是南步＋北步。所以解法是以 $2\times$北步$\times$西步为实，以南步＋北步为从法，开平方除之，得 EI，也就是方城边长。

不仅应用开平方法可得问题(A)的数值解，而且应用出入相补原理，还可以求得解答的精确表达式。如果以长方形的阔为句，长为股，那末问题(A)相当于：

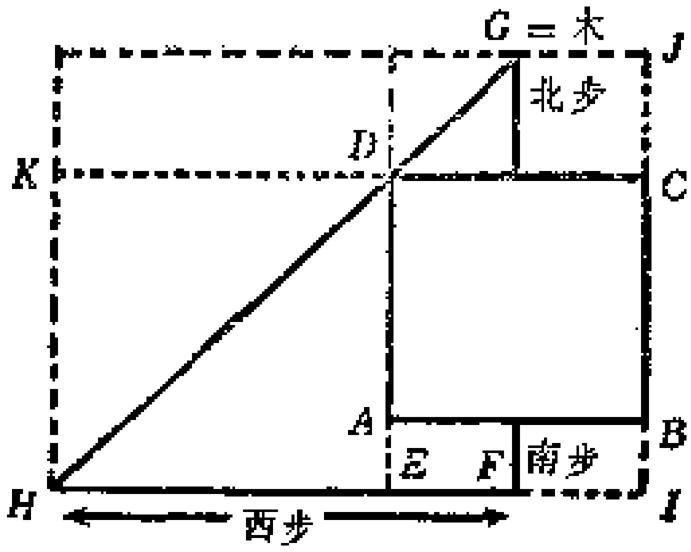


图 12

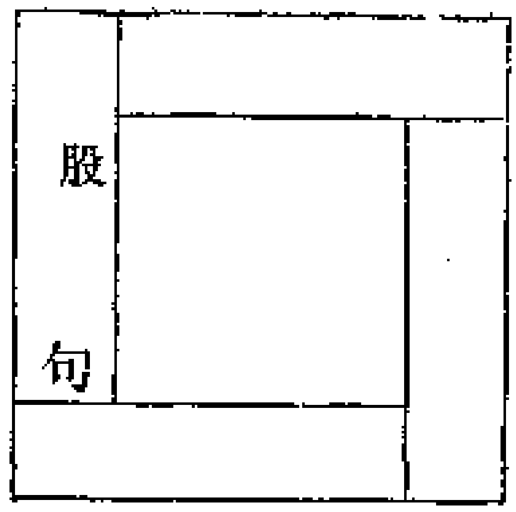


图 13

（C）已知句股积、句股差，求句、股。

为此考赵爽残图如附图 13。图中大小两正方形的边长各是句股和、句股差，所以得

句股和^2＝4 句股积＋句股差^2。由此得句股和，因而得句和股。同样也可从句股和、句股积求得句和股，这一方法可以参阅《句股说》的末一命题。

宋元时期明确引入了未知数的概念。如果以 x（当时称为天元一）表长方形阔，那末问题（A）相当于解一个二次方程

$$x^2+ax=b,$$

其中 a 相当于从法，b 相当于实。所以在古代实质上已经给出了这一形式二次方程（a、b 都是正数）的近似解和精确解，前者在宋元时期发展为求任意高次方程的数值解法，后者虽文献散佚不可查考，但是据唐初王孝通的著作以及史书关于祖冲之引述看来，不能排除我国曾经对三次方程用几何方法求得精确表达式的可能性。参阅钱宝琮《中国数学史》关于祖冲之开差幂、开差立的讨论。

在其它各国，九世纪花剌子摸的代数学名著中列举了各种类型二次方程的精确解法，它的方法是几何的，它的精神实质和出入相补原理颇相类似。十六世纪意大利数学家关于三次方程解

法，也完全是几何的。

体积理论和刘徽原理

如果规定长方形的面积是长阔的积，那末依据出入相补原理，容易得到：

(1) 三角形面积$=\frac{1}{2}\times$高$\times$底，

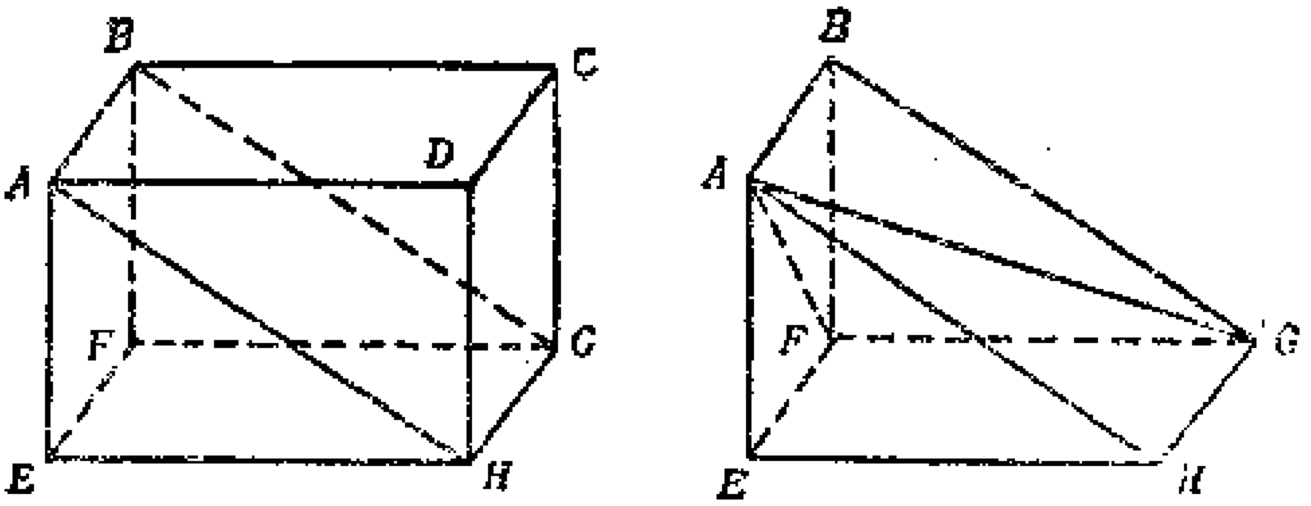
由此可以完全奠定平面多角形的面积理论。但是在空间情形，如果规定长方体的体积长、广、深的积，是否依据出入相补原理，可以推得

(2) 四面体体积$=\frac{1}{3}\times$高$\times$底面面积，

由此以建立多面体的体积理论，就不是那末明显而是极为困难的问题。欧洲直到十九世纪末，才把它作为一个难题明确地提出来。1900 年希尔伯特在国际数学会上所作著名讲演中，把体积理论列为二十三个问题之一。这一问题立即为德恩所解决，答案是否定的：两个多面体要分割成彼此重合的若干多面体，必须满足某些条件，通称德恩条件。自此以后直到 1965 年，一位瑞士数学家西德勒才证明了德恩条件也是充分的。但是问题决不能认为已经彻底解决。从希尔伯特直到晚近，多面体体积理论仍不断成为一些知名数学家讨论的课题。德恩条件叙述复杂，也难认为是合宜的最后形式。

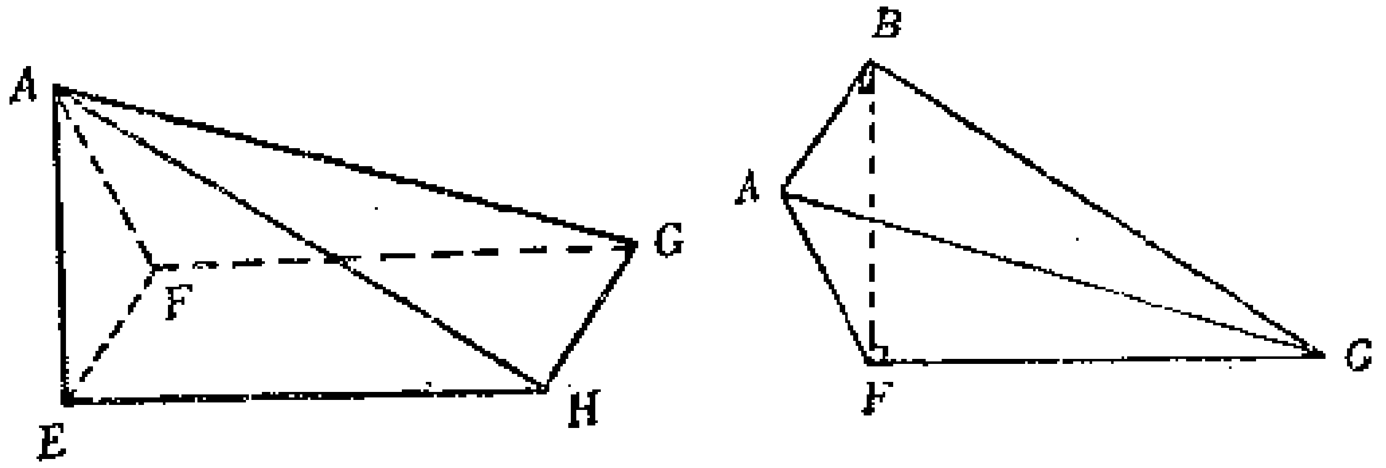
在这种情势下，看看中国古代对这一问题的处理方式是不无有启发性的。

《九章》以至《刘注》解决体积问题的出发点是把一般的多面体分解为一些基本的立体。先把一长方体斜剖为二，如图 14(1)，得两堑堵，如图 14(2)，再把堵堑斜剖为二，一个是阳马，如图 15(3)，一个是鳖臑，如图 15(4)，其中鳖臑的特征是 AB 和平



（1）　　（2）

图 14



（3）　　（4）

图 15

面 BFG 垂直，FG 和平面 ABF 垂直。由于任一多面体可以分割为四面体，而任一四面体可以分割为六个鳖臑，如图 16，所以问题归结为求鳖臑（以及阳马）的体积。依刘徽原话，就是所谓阳马、鳖臑，“功实之主也”。

其次的问题是怎样求得阳马和鳖臑的体积。如果长方体成为立方体，那么分解所得的阳马的体积是鳖臑的两倍。刘徽作了长篇的分析，得出结论是：这个论断普遍成立，用刘的原话是：“阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。”我们把它称为

刘徽原理　斜解一长方体，所得阳马和鳖臑的体积的比恒是二比一。

从这一原理容易得到鳖臑和阳马的体积公式。由此又容易得到(2)式，因而整个多面体的体积理论可奠基于刘徽以及出入相补这两个原理之上。

刘徽对它的原理有详细的分析说明，实际上就是这一原理的证明。遗憾的是因为年代久远，文字有错误脱落，已经难以索解，但是无疑是一极限过程的证法。把这一段彻底弄清，将是一件很有意义的工作[注]。按希尔伯特和他的后继者们的研究指出，体积理论和面积理论不同，出入相补原理之外，必须辅以连续一类公理。也有人(例如沙顿诺斯基，1903年)提出排除连续公理，直接应用(2)式作为建立体积理论的基础。但是这样就要先证明(2)式中高和底面积的乘积凡四都彼此相等，这既不明显也不简单，似不如刘徽原理和出入相补原理的显豁自然。

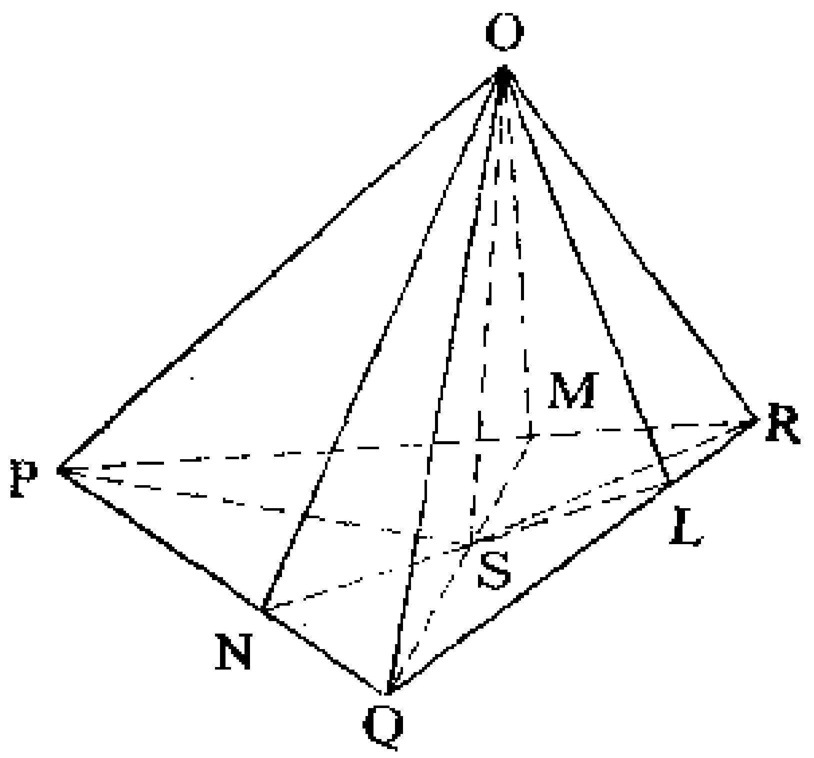


图 16

总之，多面体的体积理论到现在还余蕴未尽，估计中国古代几何中的思想和方法，或许对进一步的探讨还不无帮助。

羡除公式

《九章》中列举了各种多面体的体积，依据的就是出入相补原理和阳马鳖臑公式。现在以羡除即隧道（见图17）为例，图中 $ABCD$ 是地面，成一梯形，$CDEF$ 是隧道的一端，成垂直平面中的梯形。整个隧道依剖面 IJK 对称。EG、FH 和 CD 垂直是隧道的深，IJ 是隧道地面的长，CD、EF、AB 各称上广、下

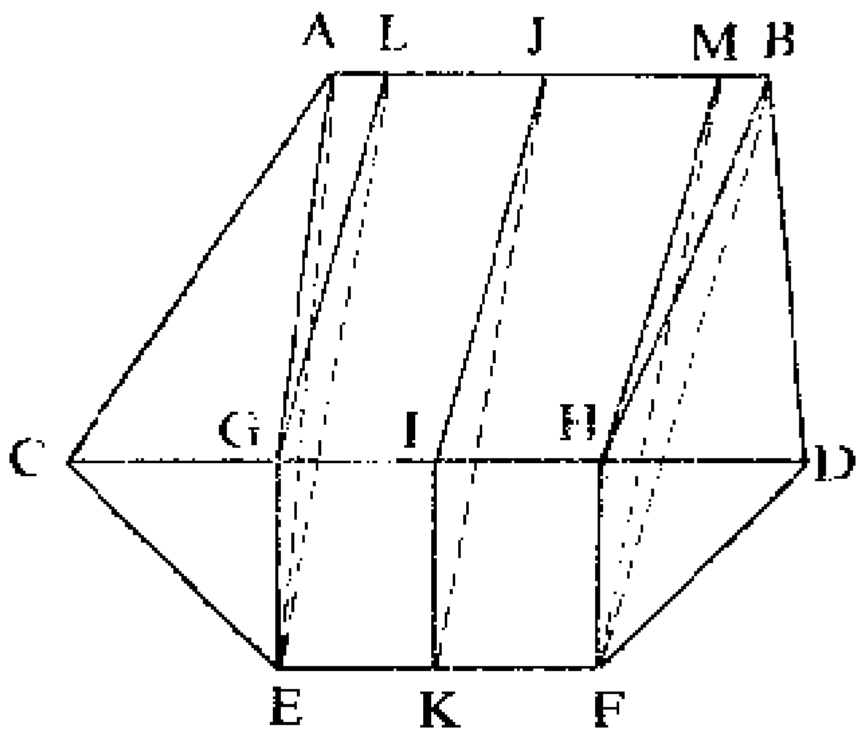


图 17

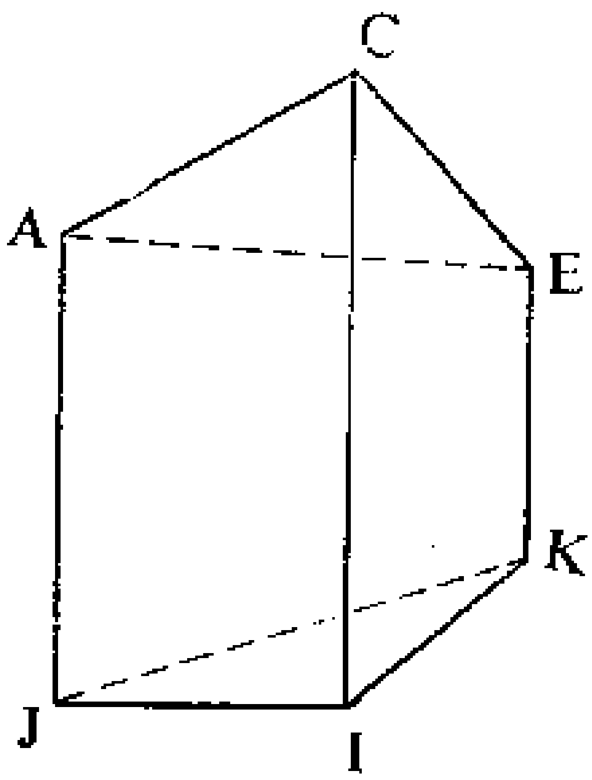


图 18

广、末广。《九章》给出的公式是：

$$羡除体积=\frac{1}{6}(上广+下广+末广)\times深\times长。$$

《刘注》的证法是先把羡除分解，如在图17中 $CD>AB>EF$ 的情形，分解成一个堑堵 $EFGHLM$，两个小鳖臑 $AGEL$ 和 $BFHM$，两个不正规大鳖臑 $ACEG$ 和 $BDFH$，再应用堑堵、鳖臑公式和上一节公式 (2)，就得到这一公式。这一方法在《九章》中用来求得例如刍甍、刍童、盘池、冥谷等多面体的体积公式。

如果依 IJK 剖面取羡除的一半，所得 $IJKACE$ 如图18是一斜截直柱体，是把一个以句股形为底面的直柱体斜截而成，它的体积是三高平均值和底面面积的积。因由任意曲面所围成的立体可以看作近似地由这样的斜截直柱体构成，所以据此可以得出函数 $f(x,y)$ 的积分近似公式，犹之微积分中求曲线下面积的辛普森积分近似公式。因而羡除公式具有重要意义。

在西方，斜截直柱体的体积公式最早见于1794年勒根德尔所著《几何原理》一书，因此也称为勒根德尔公式。按勒根德尔一

书是从欧几里得《几何原本》以后最早可以代替《原本》的名著，它的有关公式的证明同样依据四面体体积公式，但是它的分解方法和《刘注》不同。此外某些多面体西方也有不同的分解法和证法，不妨中外参照，加以比较。

球体积和祖暅原理

从《九章》到《刘注》，我国对多面体的体积已经建立了相当完整的理论体系。但是对于曲面围成的立体，特别是球的体积问题，却遇到了困难。这一球体积问题，直到南北朝祖暅才完全解决，为此并且提出了所谓

祖暅原理 幂势既同，则积不容异。

这一原理在公元十七世纪以卡瓦利里原理的形式重见于欧洲，成为微积分得以创立的关键性的一步。

祖暅关于球体积公式的证明见于《九章》的唐李淳风注，论证极其详细清晰。证明分三步：

1．在一立方体中依两不同方向作两内切圆柱体，它的共同部分称“牟合方盖”。取立方体的$\frac{1}{8}$，其中方盖部分称内棋，此外三部分称外棋。依祖暅原理可得：

$$\frac{1}{8}\text{球体积}:\frac{1}{8}\text{方盖体积}=\pi:4。$$

2．从立方体的$\frac{1}{8}$割出一倒立的阳马，应用句股定理证得三外棋等高处截面积的和跟阳马同高处的截面积相等。

3．再应用祖暅原理，知三外棋体积的和跟阳马体积相等。

由阳马的体积公式，就可以从上述三步得球体积公式。

按牟合方盖是刘徽所引入的，第一步的结果实质上也已经为刘徽所求得。事实上，在《刘注》中，他已经多次应用了祖暅原理

来求曲面围成立体的体积，例如从方堡垮求圆堡垮，从方锥求圆锥，从方亭求圆亭，都已经使用这方法。祖暅的功绩，不仅在于具体求出了牟合方盖因而求出球的体积，更在于把实际上已知并且已经广泛应用的实践经验总结提高到一般原理的形式。是否应该把祖暅原理改称为刘祖原理，是可以商讨的。

从祖暅原理可以立即得出前面讲到的刘徽原理，因而多面体的体积理论也可以建立在出入相补原理和祖暅原理这两个浅显易明的基本原理之上。在欧洲，直到希尔伯特的《几何基础》问世以后，二十世纪初年，才有人（例如绪思）考虑依卡瓦利里原理以建立体积理论的问题。

其　他

《九章》中有丰富的几何学内容，即使局限于出入相补原理，除了已经见于前面的各节的以外，也还有一些成果为我国数学以后发展的重要出发点。例如所谓句股容圆问题，在李冶的《测圆海镜》中已经有了很大的发展。又如前面提到过的所谓方城问题，在秦九韶、李冶等著作中已经把方城改成了圆城，就是旧有方法所不能解的。为此宋元时期创立了所谓天元术一类新的理论和方法，不仅可以用来解决许多新问题，对老的问题（所谓古问）也提供了新的有力工具，和老的方法（所谓古法）相比可以“省功数倍”。这些新理论新方法的实质在于几何的代数化，乃是解析几何的前奏，也是近代代数学的前驱。

总　结

出入相补、刘徽、祖暅等一般原理的建立，说明我国古代学者具有高度的抽象概括能力，善于在深入广泛的实践基础上往高里提。这些原理之简单易明正可和它们的应用之广互相辉映。这是我国古代数学的一种独特风格，着重在问题的解决以及解决的

一般方法和一般原理原则。同样的风格也可见之于几何的代数化、位值制记数法等等。这和西方数学之偏重于概念和概念之间的相互逻辑关系，是异其旨趣的。

我国数学经典著作散佚的多而保存的少，就象祖暅原理，也只靠李淳风一注才得以留传下来。象这一类重要成果而失传无从考查的，当不在少数。尽管如此，只从留传至今的典籍看来，我国数学的生产实践方面的渊源和发展演变的线索，仍旧很分明，参见下面两个附表。

表　一

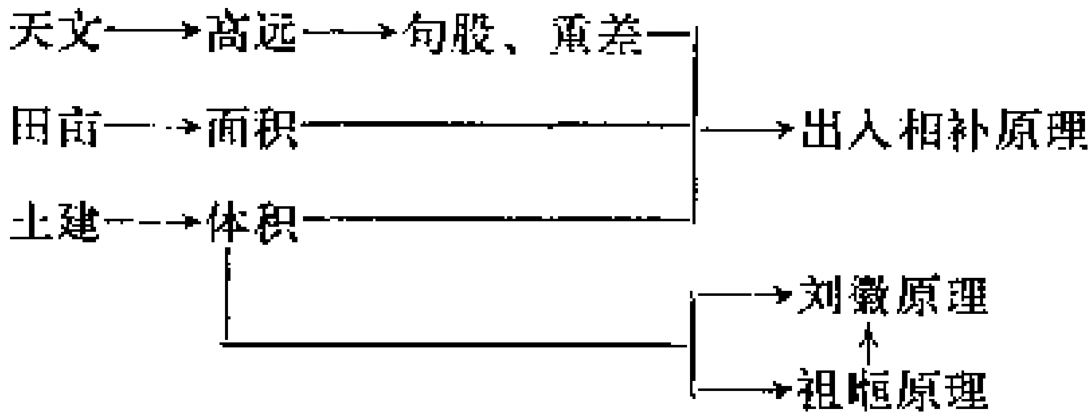
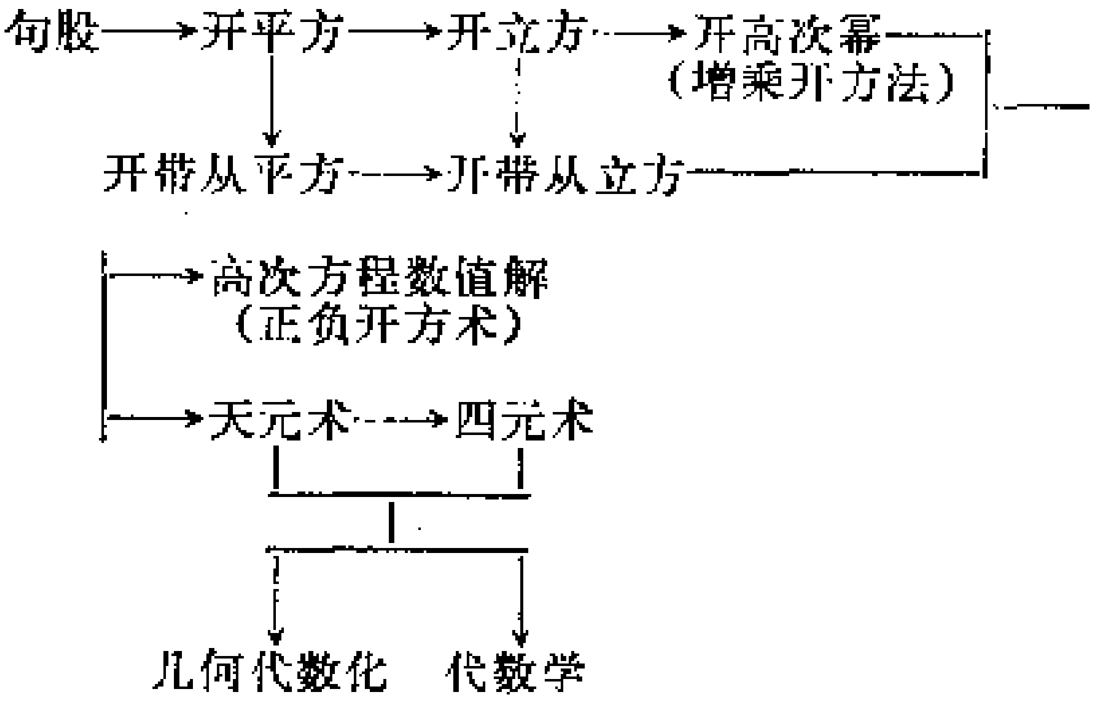


表　二



〔注〕 这一段事实上早已弄清，参阅近年来丹麦华道安与自然科学史研究所郭书春的一些论著以及本书有关论文。

刘徽与赵爽

沈　康　身

刘徽、三国魏人，赵爽、三国吴人，在魏蜀吴、三国鼎立、兵荒马乱的年代里，他俩孜孜矻矻，坚持数学探索：刘徽注«九章算术»，赵爽注«周髀算经»，对后世影响都极大。两先哲治学思想、所研究的课题又相仿佛，而彼此著述却无明文指出何者系互征引，本文就其立论平行处，作一比较。

一　治学思想

赵爽又名婴、字君卿，身世不详，我们只能从他认真从事过的«周髀算经»注文及注序中知其梗概。他“负薪余日，聊观周髀”，可见他是体力劳动者，至于注释«周髀算经»的目的，他说此书“约而远，其言曲而中。将恐废替、濡滞不通，使谈天者无所取则。辄依经为图，……披露堂室之奥”，他的注释有文有图，使后学易于读通全书，可以登堂入室。从现传本赵注«周髀算经»可看到，在插图上他确实下过大功夫，他作过“句股圆方图”、“日高图”、“七衡图”等，他还用黄、朱、青三种颜色来标记文字说明中所指不同图形。

赵爽主张学习要虚心，要善于向人学习。«周髀算经»是以周公向商高请教数学开端的，商高是善算者，赵爽认为西周政治家周公旦“位居冢宰，德则至圣，尚卑己以自牧，下学而上达，况其凡乎？”“不能自料”就“访之贤者。”在数学学习上赵爽主张“累思”，他说：“累，重也。若诚能重累思之，则达至微之理。”他要求“言约旨远”，问一事而万事达”；他释“知道”两字：“引而伸

之，触类而长之，天下之能事毕矣，故谓之知道也”。在数学教学方法上，通过注释陈子对荣方在独立思考方面的多次严格要求，赵爽深有体会地说：“凡教之道，不愤不启，不悱不发；愤之，悱之，然后启发，……举一隅，使反之以三也。”上述这些治学方法，至今仍有良好教益意义。

刘徽“幼习九章，长再详览”，对《九章算术》作长期研究后：“总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注”。他认为：“事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，知发其一端而已。”注释的方法是“析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。”可见刘注原本也是图、文并茂。从现存注文可知他对插图也施彩，以黄、朱、青三色来点明各种不同图形，借此用出入相补原理证明句股定理和其他图形面积公式，解释开平方原理等等。平面上的出入相补原理还推广为“损广补狭”，以进一步处理空间形体问题。

刘徽不迷信古人，学术问题实事求是，以理服人，另一方面又虚怀若谷，平易近人。在注方田章圆田术时，由于前人用径一周三，古率失之于粗，他注释说：“世传此法，莫肯精核，学者踵古，习其谬失，不有明据，辩之斯难。”在注少广章开立圆术中他创立牟合方盖以正“以圆囷为方率”，然而“欲陋形措意，惧失正理，敢不缺疑，以俟能言者”。其诤诤议论，掷地可作金石声。在数学教学方法上，刘徽也主张采用我国自古以来卓著成效的循循善诱、启迪发人的教育原则。在粟米章注释里，他说：“所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也”。在方程章注释里，他说：“庖丁解牛，游刃理间，故能历久其刃如新。夫数、犹刃也，易简用之，则动中庖丁之理”，在此作出生动比喻，他鼓励后学应抓住要害、关键，提纲挈领，对艰深问题才能化险为夷，掌握自如。

二　数学用语

由于交通条件、政治条件和物质条件，在数学研究成果交流上、当时所受限制是可以想象的，但是从现存文献看，两人数学研究工作竟有如此相同之处，足见我国数学科学在秦汉时代已颇具规模，特别是《九章算术》是当时标准数学教科书，早已风靡全国，因此到公元第三世纪南赵北刘在地域上相去且数千里，却使用同一数学语言，这在世界数学史上是罕见的。这里对当时所用数学名词择要作一比较。

甲　在数量关系方面

名　词	赵　爽　语	刘　徽　语
等　数	更置法实，求等数。	其余，以等数约之，
齐　同	可以齐同，故细言之。	凡子互乘谓之齐，群母相乘谓之同。
[illegible]	[illegible]	[illegible]

乙　在空间形式方面

名词	赵爽语	刘徽语
勾、股	句亦广、广，短也，股亦修，修、长也。	短面曰句，长面曰股。
结角	共结一角、邪适弦五	相与结角曰弦。
表	谓用表之宜，测望之法。	立两表齐高三丈
矩	合矩以为方。	今有望深谷，偃矩岸上。
参相直	引绳至经纬之交以望之，足与表参相直也	令后表与前表参相直。
重表	定高远者立两表。	度高者重表。
累矩	望景邈者施累矩。	测深者累矩。
面	开方除之，得其一面。	求方幂之一面也。
黄实	句股之差自相乘为中黄实	弦幂…自乘，为朱幂四，黄幂一
朱实	句股相乘为朱实二。	
弦实	句股各自乘，并之为弦实。	句自乘…，股自乘，合成弦方之幂。
句实之矩	句实之矩以股弦差为广，股弦并为袤。	句股幂合为弦幂，居里者成方幂，其居表者则成矩幂，…以股弦差为广，股弦并为袤。
大方	大方之面，句股并也。	其于大方得四分之一，故开方除之，得高广并数之半。

三　数学研究

刘徽和赵爽在直角三角形性质研究上(下简称句股术)尤有杰出成绩。

甲、日高图　《周髀算经》假设地面为平面，在南北两地立同高两表，在同一时刻、从表的日影长短、两表距离来计算日高。赵爽为之补日高图。图已久佚，今仅存80字释图说明，借此可以复原日高图(图1)。

赵爽释文是："黄甲与黄乙其实正等。以表高乘两表相去，为黄甲之实。以景差为黄乙之广而一，所得则变得黄乙之表。上与日齐，按图当加表高。"这样就算得日高。

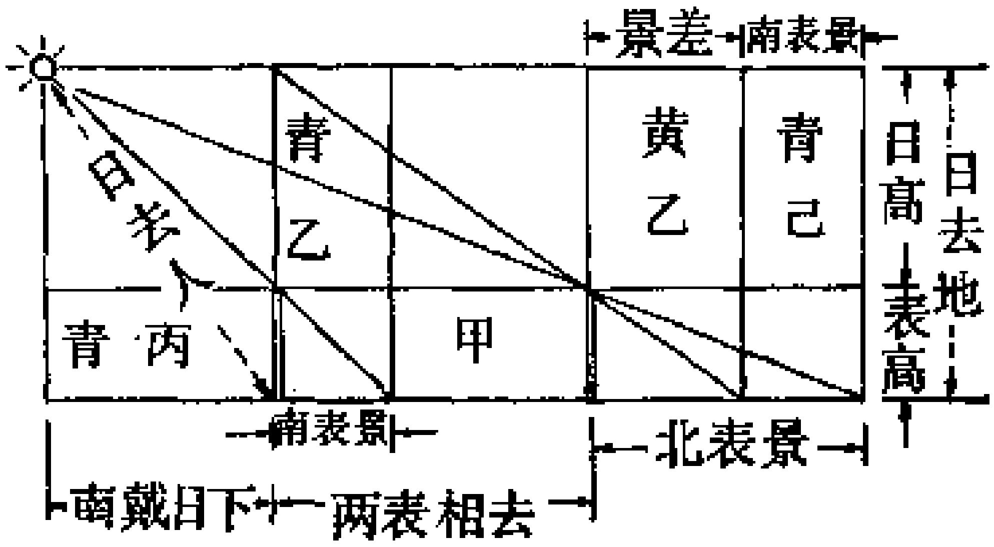


图 1

刘徽在《九章算术·注》自序中复述赵爽日高图内容说："立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景①，以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一。所得、加表高，即日去地也。"又说："以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也"；"以南戴日下及日去地为句、股，为之求弦，即日去人也"。在此自序中除再一次得出日高公式：

$$\text{日去地(日高)}=\frac{\text{表高}\times\text{表间}}{\text{景差}}+\text{表高}$$

之处，还得到另外二公式：

南戴日下＝南表景×表间/景差

① 度正中之景，谓于太阳在正南时量取八尺表之影长。

$$日去人=\sqrt{(南戴日下)^2+(日去地)^2}$$

由于地面不是平面，用这些公式来测天体距离，显然铸成大错，但这一方法在地球曲率影响可以忽略不计时，却是可取的，刘徽在所著《海岛算经》第1题就被运用来求海岛高、远。

乙、句股圆方图　图久佚，赵爽注文则存传本《周髀算经》卷上周公商高对话中，注文（下简称赵注）共540字，可得直角三角形句、股、弦关系共命题15组，大都有证明，可据以复原已佚图样。

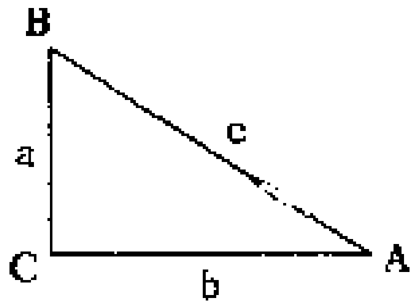
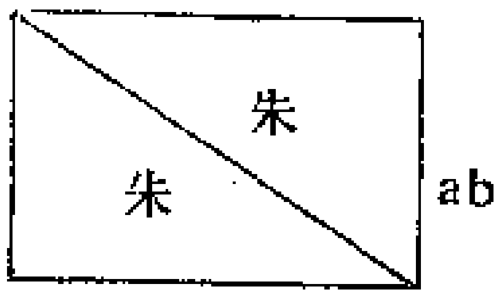
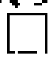
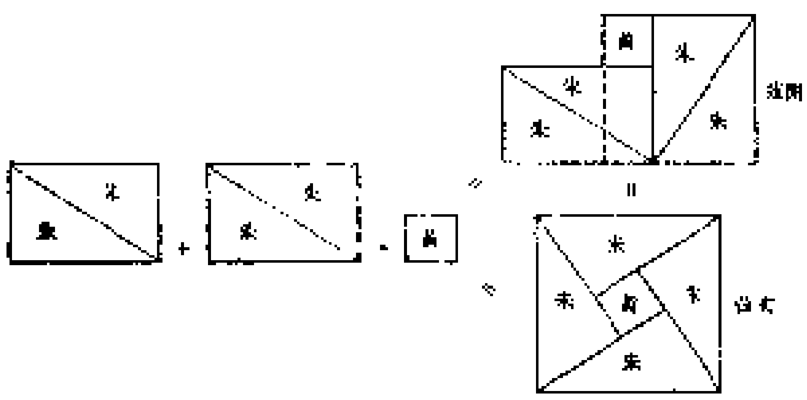
刘徽与赵爽在句股术有关问题中互相补充，相辅相成。赵爽《句股圆方图注》所列命题15组如下表所述，而在刘徽《九章算术》句股章注释中大致都得反映，而且理论问题有生活、生产实际内容，使理论相得益彰。赵注有术无证处，刘注又为填补空白，使此学在我中华，大放异彩。

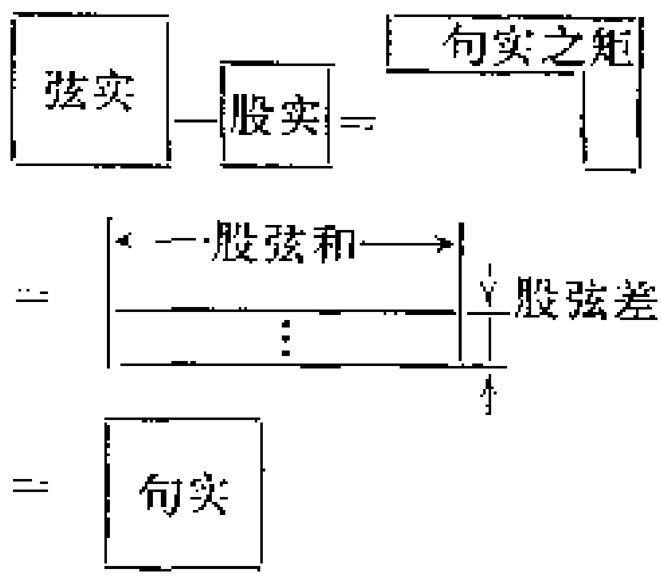
《九章算术》句股章共有24题，与赵注有关者可以分为五类：

类 1　第1题至第5题　可直接用句股定理（即赵注命题1）解决。刘徽还以出入相补原理对命题1作新证。对第5题即“今有木长二丈”题，刘注说：“（句、股）二幂之数谓倒在于弦幂之中而可更相表里，居里者成方幂，其居表者则成矩幂。二幂表里，形诡而数均…。句幂之矩，…，是其幂以股弦差为广，股弦并为袤；而股幂方其里。…是故差之与并用除之，短长互相乘也”这段话对照赵注命题3所措之词，何其相似乃尔。

类 2　第6题至第9题及第13题，《九章算术》有术无证。刘注多次指出第7、8两题同术，第7、10两题同术，第7、13两题同术，注文用语多与赵注命题5同。

类 3　第11题，即“今有户高于广，两隅相去”题，《九章算术》有术无证，刘注与赵注命题9用语十分合拍，他说：“一丈（弦）自乘为朱幂四，黄幂一，半差自乘，又倍之，为黄幂四分之二，…”。

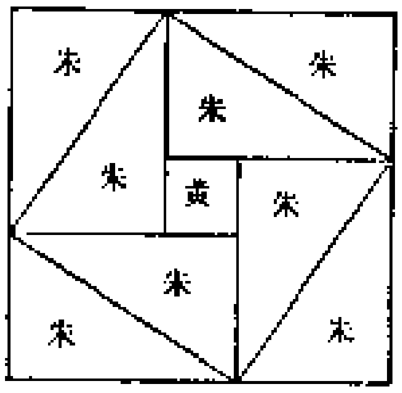
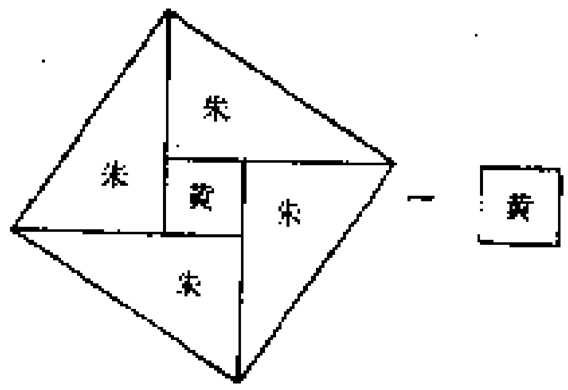
组别	命题	赵注	今释
1	命题 1	句股各自乘，并之为弦实。	设直角△ABC中句、股、弦长分别为a,b,c，则 $a^2+b^2=c^2$ 
	推论	开方除之，即弦。	$\sqrt{a^2+b^2}=c$
	命题 1 证明	案弦图又可以句、股相乘，为朱实二。倍之，为朱实四。	
		以句、股之差自相乘为中黄实	黄实  $(b-a)$
		加差实一，亦成弦实。	
2	命题 2	以差实减弦实，半其余，以差为从法，开方除之，复得句矣。	已知$c,K=b-a$，求a,b 从命题 1 知 $2\text{朱实}=\frac{\text{弦实}-\text{差实}}{2}=\frac{c^2-K^2}{2}$ 设所求句为x，则x是二次方程 $x(x+K)=x^2+Kx=\frac{c^2-K^2}{2}$的正根

组别	命题	赵注	今释
2	命题 2	加差于句，即股。	$b=K+x$
3	命题 3	凡并句、股之实，即成弦实。或方于内，或矩于外。形诡而量均，体殊而数齐。	在弦实内割去股实，余下的图形与以句为边的正方形形状不同，然而他们的面积却是相等的。
	命题 3 A	句实之矩以股弦差为广，股弦并为袤。而股实方其里，减矩句之实于弦实，开其余，即股。	余下的图形称为“句实之矩” 已知 b，句实之矩面积 $K=(c+b)(c-b)$ 求 b $b=\sqrt{c^2-(c+b)(c-b)}$ 
4	命题 4 A	倍股在两边为从法，开矩句之角即股弦差。	已知 b，句实之矩面积 $K=(c+b)(c-b)$，求 c 设面积为K的长方形，一边为 $x=c-b$，则另一边为 $x+2b$，取二次方程 $x(x+2b)=x^2+2bx=K$的正根，而
		加股为弦。	$c=x+b$，

组别	命题	赵注	今释
5	命题 5 A	以差除句实，得股弦并。	已知 a，$c-b$，求 $b+c$ 从命题 3 知 $b+c=\frac{(b+c)(b-c)}{c-b}=\frac{a^2}{c-b}$
6	命题 6 A	以并除句实，亦得股弦差。	已知 a，$c+b$，求 $c-b$ 从命题 3 知 $c-b=\frac{(c-b(b+c)}{b+c}=\frac{a^2}{b+c}$
7	命题 7 A	令并自乘，与句实为实，倍并为法，所得亦弦。	已知 a，$c+b$ 则 $c=\frac{(c+b)^2+a^2}{2(c+b)}$
		句实减并自乘，如法为股。	$b=\frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}$
8	命题 3 B	股实之矩以句弦差为广，句弦并为袤，而句实方其里，减矩股之实于弦实，开其余，即句。	已知 c，股实之矩面积 $(c+a)(c-a)$，求 a， $a=\sqrt{c^2-(c+a)(c-a)}$
9	命题 4 B	倍句在两边为从法，开矩股之角，即句弦差。	已知 a，股实之矩面积 $K=(c+a)(c-a)$，求 c 设面积为K的长方形，一边为 $x=c-a$，则另一边为 $x+2a$，取二次方程 $x(x+2a)=x^2+2ax=K$ 的正根，而
		加句为弦。	$c=x+a$

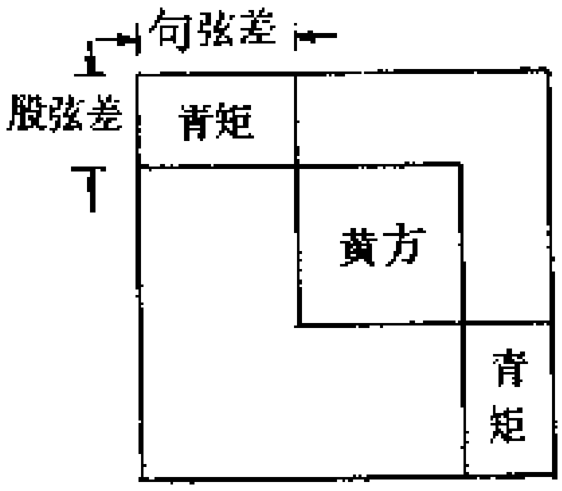
续表

组别	命题	赵注	今释
10	命题 5 B	以差除股实，得句弦并。	已知 b，$c-a$，求 $a+c$ 从命题 3 知 $a+c=\dfrac{(a+c)(c-a)}{c-a}=\dfrac{b^2}{c-a}$
11	命题 6 B	以并除股实，亦得句弦差。	已知 b，$c+a$，求 $c-a$ 从命题 3 知 $c-a=\dfrac{(c+a)(c-a)}{c+a}=\dfrac{b^2}{c+a}$
12	命题 7 B	令并自乘与股实为实，倍并为法，所得亦弦。	已知 b，$c+a$，则 $c=\dfrac{(c+a)^2+b^2}{2(c+a)}$
		股实减并自乘，如法为句，	$a=\dfrac{(c+a)^2-b^2}{2(c+a)}$
13	命题 8	两差相乘，倍而开之，所得，以股弦差增之，为句。	已知 $c-a$，$c-b$，求 a,b,c $\sqrt{2(c-a)(c-b)}$ $a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+c-b$
		以句弦差增之，为股。	$b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+c-a$
		两差增之，为弦。	$c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+c-a+c-b$
14	命题 9	令并自乘，倍弦实乃减之，开其余，得中黄方。	已知 c，$a+b$，求 a,b $(b-a)^2=2c^2-(a+b)^2$
		黄方之面，即句股差。	$b-a=\sqrt{2c^2-(a+b)^2}$
		从差减并而半之，为句。	$a=\dfrac{\sqrt{2c^2-(a+b)^2}-(b+a)}{2}$

组别	命　题	赵　注	今　释
14	命题 9	加差于并而半之，为股。	$b=\frac{\sqrt{2c^2-(a+b)^2}+(b+a)}{2}$
	证　明	倍弦实满外大方而多黄实，黄实之多，即句股差实，以差实减之，开其余，得外大方，大方之面即句股并也。	 = 外大方（并自乘） $=2$  倍弦实　黄方 外大方边长 $=a+b=\sqrt{2c^2-(b-a)^2}$
15	命题10	其倍弦为广袤合，令句、股见者自乘为其实。四实以减之，开其余，所得为差。	已知 $K=a+b$，$l=ab$，求 a，b $b-a=\sqrt{K^2-4l}$
		以差减合，半其余，为广。	$a=\frac{K-\sqrt{K^2-4l}}{2}$
		减广于弦，即所求也。	$b=K-a$

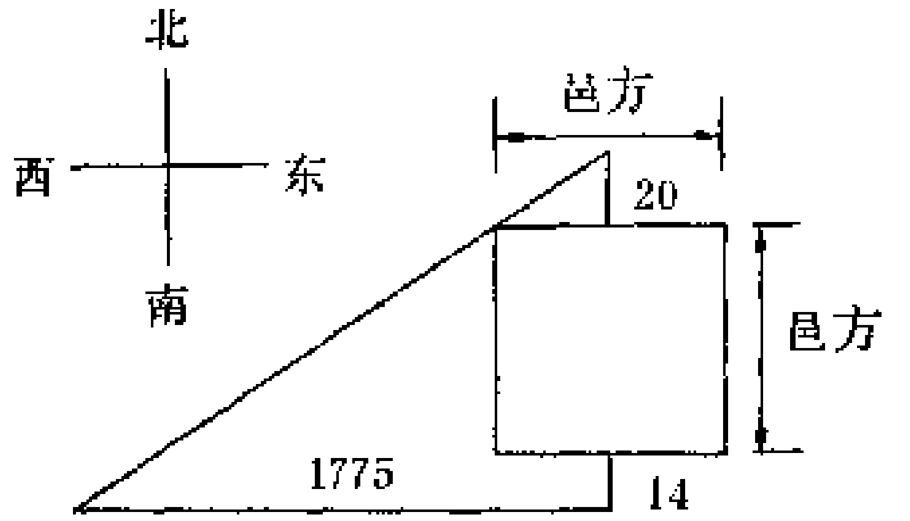
问题刘注还引入不同于《九章算术》原术，改用开带从平方，也就是把它归结为赵注命题 2 问题："以句股差幂减弦幂，半其余，差为从法，开方除之，即句也"。

类 4 第 12 题，即"今有户不知高广，竿不知长短"题。刘注用赵注命题 8 结果，并为赵注补作证明。

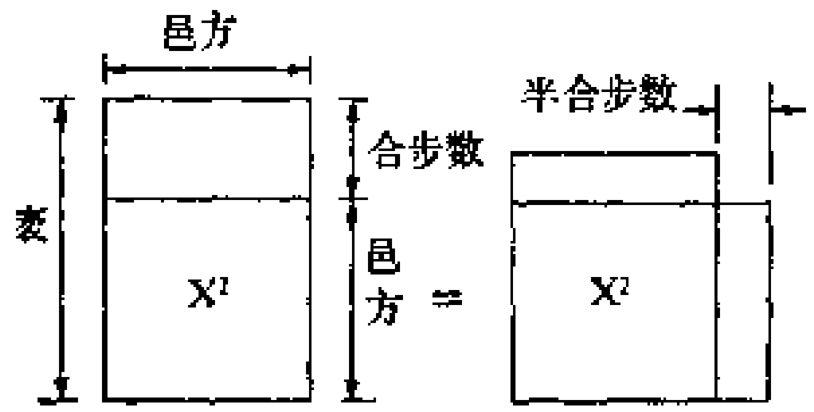
刘注	今释
满此方，则两端之矩，重于隅中，各以股弦差为广，句弦差为袤，故两差相乘又倍之，则成黄方之幂。	已知 $c-a$，$c-b$，求 a,b,c $(c-b+a)^2=$ $=2(c-a)(c-b)$ 
开方除之，得黄方之面，	$c-b+a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$
其外之青矩亦以股弦差为广，故以股弦差加之，则为句也。	$a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+c-b$

类 5 第 13 题，即"今有竹高一丈"题，刘注同赵注命题 7。

还须指出，《九章算术》句股章第 20 题，即"今有邑方不知大小，各中开门"题，刘徽先用相似三角形对应边成比例法则注释术文第一段话："以出北门步数，乘西行步数，为实"。

刘　　注	今　　释
此以折而西为股，自木至邑南十四步为句。以出北门二十步为句率。北门至西隅为股率，即半广数。故以出北门句率乘西行股，得半广股率乘句之幂。	 设邑方为 x，则 $1775:(20+x+14)=\frac{x}{2}:20$， $20\times1775=\frac{x}{2}\times(20+x+14)$

在注第二段话："并出南门步数为从法，开方除之，即邑方"时

刘　　注	今　　释
此术之幂，东西广如邑方，南北自木尽邑南十四步为袤，合南北步数为广袤差，故并两步数为从法，以为隅外之幂也。	 设邑方为 x，从第一段话知长方形面积为 $x(20+x+14)$，而 $x(20+x+14)=2\times20\times1775$， $x^2+(14+20)x=2\times20\times1775$ 所求 x 用开带从平方求解。

刘徽把问题归结为已知长方形面积、长宽差，求长、宽，即赵注命题 2，但借此说出赵注未道之理。

为便于对照，我们列表说明两人在这一领域中的成果

赵注命题号	对应《九章算术》句股章刘注题号
1，有 证	1—5，新证
2，只说明系数求法，未示理由	11，20，新证
3A，3B，有证	5，证同赵注
4A，4B，有证	
5A，5B，有证	6—10，13，有术未证
6A，6B，有证	
7A，7B，有证	13，有术未证
8，有术无证	12，新 证
9，有 证	11，证同赵注
10，有术无证	宋杨辉《田亩比类乘除捷法》卷下题 6 图证

四 对后世影响

刘徽、赵爽上述研究成果对后世很有影响。直角$\triangle ABC$，其句、股、弦如分别记为 a, b, c，又三者和、差，共九事，即：

$$a, b, c; a+b, b+c, c+a; b-a, c-a, c-b.$$

已知其二，求未知件（此三角形边长），共有$\binom{9}{2}=36$种问题。其中有些情况，通过句股互换，可以归并。例如已知 $a, c+b$ 与 $b, c+a$ 为同种问题；有些通过加减法，就立刻得到结果，例如 $a, a+b$；$a+b, a+c$。这 36 种问题，值得探索的有八种，这就是：

情况	已　知　件	研　究　成　果
1	a, b(句，股)	赵注命题 1 、刘注
2	a, $c+b$(句，股弦和)	赵注命题 6
3	a, $c-b$ (句，股弦差)	赵注命题 5
4	c, $a+b$ (弦，句股和)	赵注命题 9
5	c, $b-a$ (弦，句股差)	赵注命题 2 ，刘注补充
6	$c+a$, $c+b$ (句弦和，股弦和)	朱世杰《算学启蒙》，项名达《句股六术》
7	$c+a$, $c-b$ (句弦和，股弦差)	康熙《数理精蕴》。项名达《句股六术》
8	$c-a$, $c-b$ (句弦差，股弦差)	赵注命题 8 ，刘注补证

这 8 种情况，赵爽、刘徽已解决第 1 至 5 ，以及第 8 ，共 6 种情况，都给出证明。

南宋杨辉对赵爽、刘徽工作认真钻研，对日高图、海岛算经作为座右铭来学，在所著《详解九章算法纂类》一书中把句股章24题以句股及其和差关系归为 5 类，与本文分析相一致。在所著《田亩比类乘除捷法》卷下第 6 题："直田积 ($ab=l$) 八百六十四步，只云长阔共 ($a+b=K$)六十步，问长多阔几何？"所立和步求差术："四之积步，减和自之积，余，开平方除之，得长阔之差步"适为赵注命题 10 的证明(图 2)。

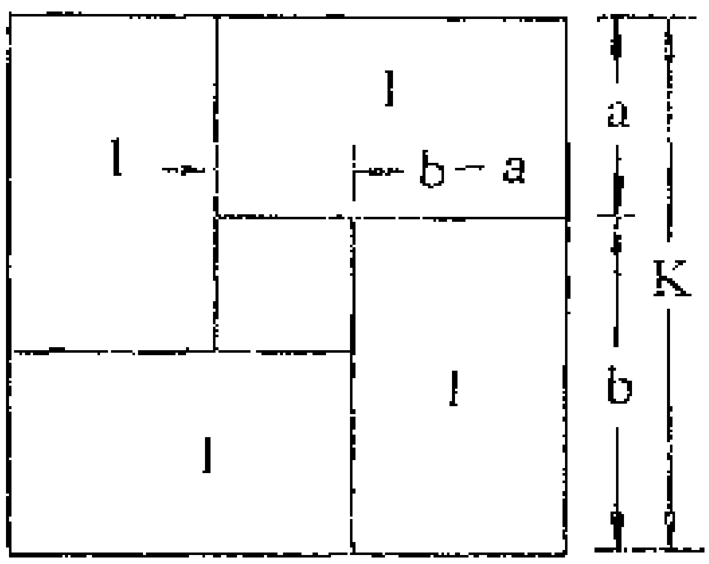


图 2

元朱世杰《算学启蒙》卷下方程正负门第8、9两题提出已知句弦和、股弦和求句、股，即情况6这个问题，在术文中给出正确公式："句弦和…以股弦和乘而倍之…乃弦和和幂也，平方开之，即弦和和。"这就是

$$a+b+c=\sqrt{2(a+c)(b+c)}.$$

又说："减股弦和，即句；减句弦和，即股"，"句弦和内减句，余即弦"。这是说

$$a=\sqrt{2(a+c)(b+c)}-(b+c)$$
$$b=\sqrt{2(a+c)(b+c)}-(a+c)$$
$$c=(a+c)-a.$$

朱世杰未给出证明。

清康熙《数理精蕴》对上述36种情况中一部分作过分析，对情况7有过结果。而清末项名达《句股六术》对36种情况逐一讨论，对情况7，即已知句弦和、股弦差，求句、股、弦公式是："以句弦和、股弦较相乘，倍之为实，平方开之，得弦较较。乃置弦较较与股弦较相减为句，与句弦和相减为股，并句弦和、股弦较与之相减，即弦"。这就是

$$\sqrt{2(a+c)(c-b)}=c-(b-a)=c-b+a,\text{而}$$

$$a=\sqrt{2(a+c)(c-b)}-(b-a),$$

$$b=\sqrt{2(a+c)(c-b)}-(a+c),$$

$$c=c+a+c-b-\sqrt{2(a+c)(c-b)}.$$

项名达对情况6,7作了证明。

已知直角△ABC两边乘积：ab, bc, ca之一，又已知一边或两边和、差：

$$a,b,c;a+b;b-a;b+c;c-b;c-a,b-a$$

之一，求未知件(此三角形边长)，值得探索的问题有十种：

情况	已知件	研究成果
1	ab，c（句股积，弦）	
2	ab，$a+b$（句股积，句股和）	赵注命题10，杨辉证明
3	ab，$b-a$（句股积，句股差）	赵注命题2，刘注句股章第20题
4	ab，$a+c$（句股积，句弦和）	《数理精蕴》下编卷24
5	ab，$c-a$（句股积，句弦差）	《缉古算经》第15题
6	bc，a（股弦积，句）	《缉古算经》第19题
7	bc，$a+b$（股弦和，句股和）	
8	bc $b-a$（股弦和，句股差）	
9	bc，$a+c$（股弦积，句弦和）	
10	bc，$c-a$（股弦积，句弦差）	《缉古算经》第18题

赵爽、刘徽已解决情况2,3。唐王孝通《缉古算经》第15至第20题提出过情况5、6、10，并有解法公式。《数理精蕴》下编卷24又解决了情况4，其余四种情况，即1,7,8,9我国就没有人作过研究，而且王孝通术文有术无证明。如何在当时条件下来解释这些数学现象，还有待于我们进一步讨论。

五 与外国比较

句股定理在欧几里得《几何原本》卷1第47题已有完整总结，而对句股术其他问题国外发展较迟。

类似于赵爽日高图、刘徽重差术之施于普通测量为时很晚，我们所见到的最早记录是1569年意大利威尼斯出版物上材料。

类似于《句股圆方图注》句股术研究，国外数学著述尤为少觏①。

① 法国人冉贝尔(Gerbert 950—1003)研究过已知ab,c求a,b的问题。

《几何原本》卷 2、卷 6 有用几何方法解形如：

$x^2+Ax=B$，$x^2-Ax=B$，$Ax-x^2=B$（A，B 均正数）二次方程，但立术与赵注文大异其趣。

印度自七世纪以来在数学著作中一再出现与赵注各命题相仿的数学问题，例如婆罗笈多（Brahmagupta）书（628）中出现过赵注命题 5，巴士卡拉（Bhaskara）书（1150）中有过与赵注命题 1 相同证法，还出现过类似于《九章算术》句股章第 6 题，“今有池方一丈葭生中央”题和第 13 题，“今有竹高一丈”题和第 20 题，“今有邑方不知大小，各中开门”题等。这就不得不引起数学史工作者的关注，美国人卡约黎（F. Cajori）在所著《数学史》中说：“中印数学关系如此密切，因为从四世纪开始两国人民使节不绝于途，中国数学传入印度是无可置疑之事”。

人类历史上第一本《代数学》作者中亚细亚学者阿尔·花拉子模（九世纪）所创二次方程求根公式也从几何变换得来，他把

$$x^2+px=q$$

看成是短边十字形面积。为了凑成正方形，在四个角各添补面积为$\left(\frac{p}{4}\right)^2$的小正方形（图3），于是

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}=q+\frac{p^2}{4},$$

$$x=\frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

他还有另一种解释，考虑图中阴影部分的面积是 q，即

$$x^2+px=q,$$

为凑足一个正方形，在右上角加上边长为$\frac{p}{2}$的正方形（图 4），则

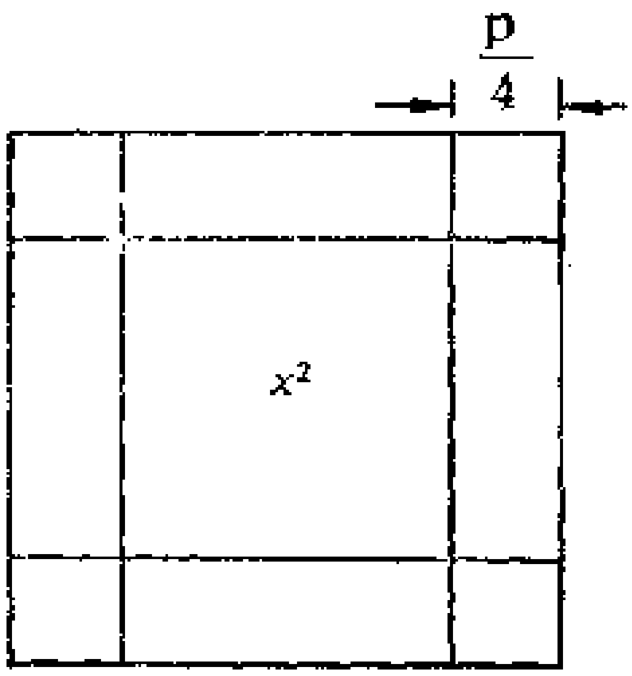


图 3

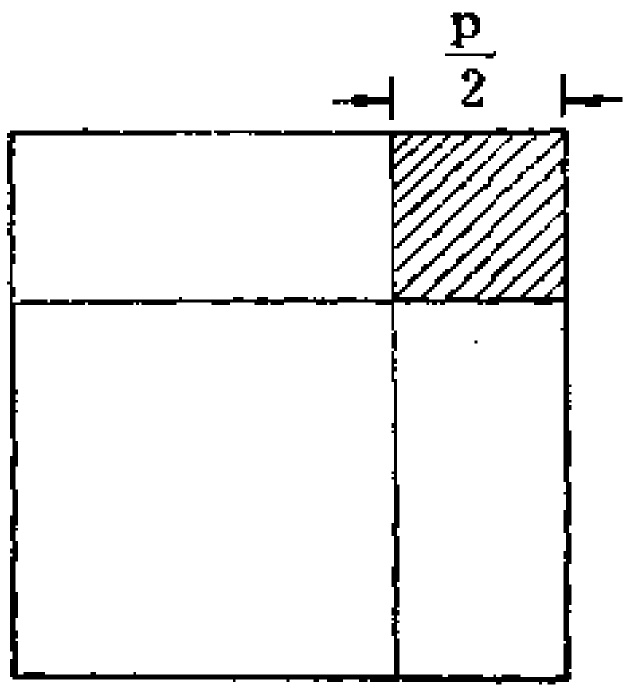


图 4

$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=q+\left(\frac{p}{2}\right)^2$，同样得到

$$x=\frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

这与刘徽注«九章算术»句股章第 20 题后半段措意正同，但已晚于我国六百多年。

十三世纪以后欧洲算术教科书中多次出现过«九章算术»句股章第 6 题和第 13 题。

中亚细亚数学家阿尔·喀西著«数学钥»(1427)也载有类似于«九章算术»句股章第 6 题算题。

参 考 文 献

[1] 钱宝琮，«中国数学史»，1964。
[2] 吴文俊，«我国古代测望之学重差理论评介»，中国数学史座谈会，1976。
[3] F. Cajori, A Histofy of Mathematics,1917.
[4] M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,1972.

刘徽的数学推理方法

李　迪

刘徽在《九章算术》注序中说："又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。"其中"析理以辞"一语相当于逻辑推理；"解体用图"就是直观推理，两者结合起来就形成了非常有效的数学推理方法。刘徽不仅对这两者的认识十分清楚，而且在自己的研究中充分加以运用，从而取得许多重要数学成果。

一　逻辑推理方法

按照通常的理解，逻辑推理方法应当包括两方面的主要内容，其一是逻辑规定，如对概念的定义，不加证明的命题——公理以及基本的作图——公法等，作为逻辑推理的基础。其二是具体的推理方法，如分析法、综合法、反证法、归纳法等。刘徽在这方面有卓越的贡献，在他的《九章算术》注中处处闪烁着逻辑推理思想的光辉，但可惜的是由于为书作注受到限制，未能形成一个逻辑系统。

刘徽对许多数学概念下了定义，如"凡广从相乘谓之幂"，"凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同"，"列衰，相与率也"，"(开平方)：求方幂之一面也"，"(开立方)：立方适等，求其一面也"，"立圆，即丸也"，"壤谓息土"，"坚谓筑土"，"墟谓穿坑"，"阳马之形，方锥一隅也。今谓四柱屋隅为阳马"，"短面曰句，长面曰股，相与结角曰弦"等等。有了定义，概念明确，为推理提供了依据，例如有了"齐"、"同"的定义就可以建立齐同

术，有了"开（平）方"、"开立方"的定义，便能更科学地进行开方。这些定义都是直接给出的，可说是直接定义。

还有一些概念、如圆面积、弓形面积、"阳马"体积等等的定义都是间接通过相当于极限的思想给出的，例如刘徽说：从圆内接正六边形开始，逐渐倍增边数，"割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。"这就是当边数无限倍增时把圆内接正多边形面积的极限看做是圆的面积。现代数学中对圆面积、球的体积和表面积的定义等等，仍然采用与刘徽相仿的方式，所不同的是现代的定义更精确罢了。

刘徽没有明确提出公理，但是他在推理过程中用到一些未加证明而承认为正确的命题，主要的有以下几条：

(1) 平面形和立体形经过移动，其面积和体积不变。

(2) 长方形的面积等于长乘宽之积。

(3) 长方体的体积等于长乘宽乘高之积。

(4) 平面形和立体形有限次分割之后，各部分的面积或体积之和等于原形的面积或体积。

(5) 平面形和立体形可以无限分割。

(6) 等高的立体在任一等高处的横截面的面积之比为一常数，两立体的体积之比也等于这个常数。

(7) 通过比例关系进行等值变换。

在这些命题（尽管没有明确提出来）的基础上刘徽对许多数学命题进行了论证，例如"圭田术"注："半广者，以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广。按半广乘从，以取中平之数"，就是对等腰三角形面积等于"半广以乘正从"这一命题所作的论证，显然用到了上述命题中的前四条，没有这些命题是不行的。最近国内有人把这类论证叫做"出入相补"原理[1,2]，实际上是对上述命题联合运用所作的简捷的叙述。至于具体作法，已有人多次讲过，这里不再重复。

刘徽特别注意推理，他认为有些问题即使不便于进行计算，也可以通过推理得到正确的结论，指出："数而求穷之者，谓以情推，不用筹算"。他又说："不有明据，辩之斯难"，强调在推理中论据的重要性，没有论据是无法推理的。因此，刘徽常常提出一些假设，在进行割圆时他"假令圆径二尺"，由此推得"圆中容六觚之一面，与圆径之半，其数均等"。在"开立圆术"注中刘徽也说："令圆幂居方幂四分之三，圆囷居立方亦四分之三。更令圆囷为方率十二，为丸率九，丸居圆囷又四分之三也。"又"假令丸中立方五尺，……"。等等。在此基础上进行推理，步骤清晰，论证明确有力，表现出刘徽的逻辑思维能力是很强的。

在推理过程中，他所用的方法有直接的，也有间接的。所用的推理方法有下面几种：

1．分析与综合 这里是把一个命题分解为几部分分别进行论证，然后再把这些论证的结果综合起来得到整个命题的结论的推理方法。例如关于"方亭"、"阳马"等体积计算的命题的论证刘徽就是采用这种方法进行推理的，他把按他事先假定的条件将"方亭"分解为一个立方体、四个相等的"堑堵"和四个相等的"阳马"，分别求出立方体、"堑堵"和"阳马"的体积计算法则，"并之，以为方亭积数也"，就是合起来就得到了"方亭"的体积计算法则。

2．归纳与推广 刘徽善于使用归纳与推广的方法进行逻辑推理，使某些特殊的方法或命题得到较广的适用范围。例如他在"方程"章第七题注中改进了《九章算术》原有的解线性方程组的"直除"法，而建立"相乘左右行"法（即相当于现在的加减消元法）。此方程组只有二元，这样做是正确的。对于三元以上的线性方程组是否可以使用这种方法呢？刘徽在注中没有再给出实例，也许他另外做过而没有写进注里，但是他却得出这样一个结论："以小推大，虽四、五行不移也。"很显然，"以小推大"就是从特殊到一般的典型归纳推理方法，"四、五行"是指四、五元方

程组，实际是指任意元数的线性方程组。通过归纳方法，刘徽把“相乘左右行”法从二元方程组推广到任意元方程组。不过，刘徽所用的归纳法是不完全归纳法。

此外，刘徽还在其他许多方面进行推广，如“齐同”术、“今有”术、“重差”术等从原来的范围大大予以扩张，他说：“度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入”。这是对“重差”术的推广。

3．分析法 这里所说的分析法与前面的“分析与综合”中的方法不同，是由结论开始反推。例如“粟米”章第38到43题，对结果都要求整钱数，第38题是：“今有出钱五百七十六，买竹七十八个。欲其大小率之，问各几何？答曰：其四十八个，个七钱。其三十个、个八钱”。刘徽在第43题答案后统一作注称：“如欲令无分，按出钱五百七十六。买竹七十八个，以除钱得七，实余三十。是为三十个复可增一钱。然则实余之数即是贵者之数。故曰‘实贵’也。本以七十八个为法，今以贵者减之，则其余悉是贱者之数。故曰‘法贱’也。”这是以第38题为例说明这类问题的解法。因为题中都未给出“率”之值，但有“大小”或“贵贱”的要求，所以这种要求可看做是已知条件的一部分。由“如欲令无分”出发，推出“贵贱”或“大小”之率，是一种分析法的雏型。

4．演绎法 这种方法与归纳法相反，它是由一般到特殊的推理。刘徽在这方面虽然表达的不很清楚，但他曾大量使用过，在许多方面他都先提出一般原理，然后运用它去解决具体问题。例如他对“方田”术“广从步数相乘得积步”注称：“此积谓田幂。凡广从相乘谓之幂”，合起来可以说是关于长方形面积计算的一般概念，即所有长方形面积等于长宽之积。在“圭田”术“半广以乘正从”下注称：“半广者，以盈补虚为直田也”，就是把“圭田”变成“直田”(长方形)，既然是“直田”，那么它的面积计算法则就是长乘宽。归结起来，可这样理解：矩形的面积等于长宽之积，

某图形是矩形，因此它的面积等于长宽之积。这种推理方法有点和三段论法相似，三段论法指的概念间的包含关系，由两个前提和一个结论、共三个概念所组成，刘徽的推理也可以大体上这样理解。

5．反驳 刘徽在《九章算术》注中，曾经大量使用反驳这种逻辑思维，对《九章算术》中的错误进行论证，例如对“宛田”术、“弧田”术、“开立圆”术等都是这样，他的反驳是有力的。在“开立圆”术注中，他反驳了张衡的论证，“张衡算又谓立方为质，立圆为浑。衡言质之与中外之浑：六百七十五尺之面开方除之，不足一，谓外浑积二十六也。内浑二十五之面，谓积五尺也。”这是张衡的论证，刘徽认为“令质中言浑，浑又言质，则二质相与之率，犹衡二浑相与之率也。衡盖亦先二质之率推以言浑之率也。衡又言质六十四之面，浑二十五之面。质复言浑，谓居质八分之五也。又云：方八之面，圆五之面。圆浑相推，知其复以圆围为方率，浑为圆率也，失之远矣。”这是刘徽对张衡论证球与外切、内接立方体的体积关系的反驳。在“宛田”术“以径乘周，四而一”的注中，刘徽指出：“此术不验”，为什么呢？他说：这可以用“推方锥”的办法论证其错误，“宛田”的表面积等于“以径乘周，四而一”的算法实际上是方锥的内切圆锥的表面积，“今宛田上径圆穹，而与圆锥同术，则幂失之于少矣”。从而反驳了《九章算术》中的论题。

刘徽在推理中有些叙述与数理逻辑的某些内容相近，或者可以看做是数理逻辑在中国的萌芽，其中有的是从《九章算术》开始。例如“方田”章“约分”术“可半者半之，不可半者，副置分母子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。”这一算法和希腊的“Euclid 算法”一致，其中所谓“等数”就是两数的公约数。为什么可以“更相减损”，刘徽指出：“其所以相减者，皆等数之重叠”。刘徽还多次用到“凡”这个字，是“所有”的意思，相

当于数理逻辑中的“全称量词”。在“约分”术注中刘徽说：“设有四分之二者，繁而言之，亦可为八分之四；约而言之，则二分之一也。”即有$\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$和$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。他接着又说：“虽则异辞，至于为数，亦同归尔”。也就是三个比值都相等，当然有$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，这合于传递性。

通过上述各项事实可以看出，刘徽的逻辑思维水平很高，在推理中运用了各种方法，而且有了数理逻辑思想的萌芽，仅就这一点来说，他也称得上伟大的数学家。

二 逻辑推理中的直观方法

刘徽不仅使用各种逻辑推理方法研究数学问题，而且还使用大量图形、模型等直观方法，帮助他发现逻辑关系和推理方法。

在刘徽的时代(公元三世纪)，纸的使用已较普遍[3]，这为数学图形的绘制创造了条件。刘徽在“句股”章第 16 题注中直接提到纸，可见他的数学图形是画在纸上的。

“方田”章第二题答案下，刘徽注称：“图从十四，广十二”。在其后几十道题或“术”的注中都恰当地使用图形进行直观推理。他在许多注中明确的讲到图，特别是那些比较复杂的问题，没有图形是不可想象的。例如“割圆”术，他一再说：“又按为图”，“谨按图验，更造密率”，就是根据图形，继续推求，可以得到更精确的圆周率值。

特别值得提出的是刘徽不仅使用单色图，而且使用多色图，用不同颜色的图形。如“句股”章第 11、12、14、15、16 等题的刘徽注中都讲到多色图形，在第 11 题注中刘徽说：“按图为位，弦幂适满万寸。倍之，减句股差幂。……一丈自乘为朱幂四，黄幂一。半差自乘，又倍之，为黄幂四分之二。减实，半其余，又

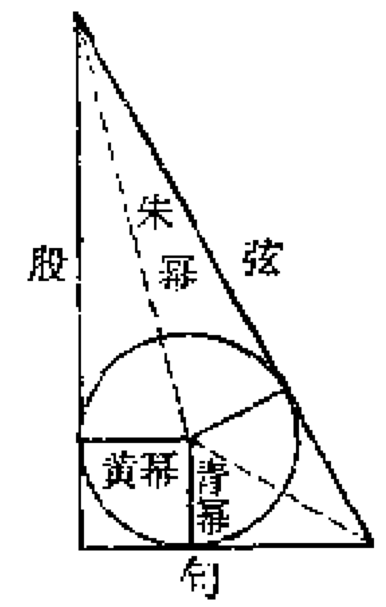


图 1

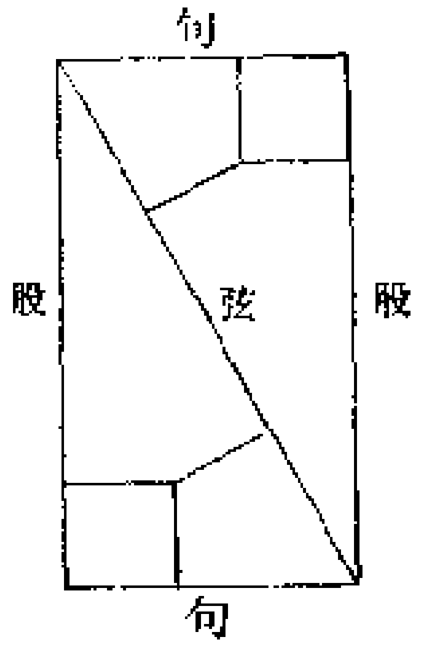


图 2

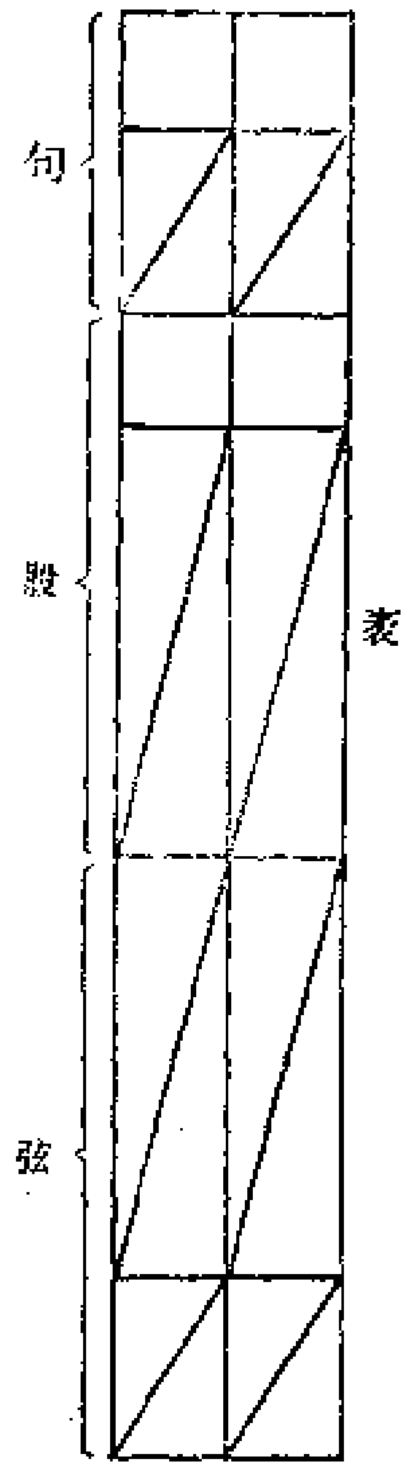


图 3

朱幂二，黄幂四分之一。……，又按此图幂，句股并自乘，加差幂，为两弦幂。”这里使用了朱、黄两种颜色的图形。第 16 题注是非常重要的，此为有名的“句股容圆”问题，原题是：“今有句八步，股十五步。问句中容圆，径几何？答曰：六步。术曰：八步为句，十五步为股，为之求弦。三位并之为法，以句乘股，倍之为实。实如法得径一步。”刘徽在处理此题时采用了非常漂亮的直观方法，他先把图形画在纸上，把各个部分涂上不同颜色，再剪裁成小纸片，“令颠倒相补，各以类合，成脩幂。”如图 1，由圆

心向句、股、弦三边分别引垂线，把句股形分为三部分，分别涂上朱、青、黄色，再将一个与此相等的图形颠倒相补，就成了图2，即引文中所说的“句股相乘为图之本体，朱、青、黄幂各二”。“倍之则为各四”，就是把四个相等的句股形都按右上图那样裁剪成五块，共二十块，再“各以类合，成脩幂”，结果重新合并成一个大长方形、长为句、股、弦之和，宽恰为圆的直径(即两个小黄方接成的边)(如图3)。很显然，这个大长方形的面积是原句股形面积的四倍，即

$$4\times\frac{1}{2}\times 句\times 股=2\times 句\times 股.$$

而大长方形的面积又等于广、袤之积，其中广为圆径，“袤”为句、股、弦之和，于是有

$$圆径=\frac{2\times 句\times 股}{句+股+弦},$$

这就是句、股、弦“三位并之为法，以句乘股，倍之为实。实如法得径一步”。通过直观方法把《九章算术》中的计算公式论证得清清楚楚。

刘徽不仅善于使用图形，而且也善于使用模型(他叫做“綦”)，把一些很复杂的立体几何问题或其他问题分解为若干个较为简单的模型，再考虑它们之间的关系，进而把问题解决。例如在第一节中提到的“方亭”术注中，刘徽就是这样做的，通过直观方法进行分析与综合，说明了《九章算术》中关于“方亭”体积的计算步骤：“上下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一”的正确性。

刘徽在“羡除”术、“刍甍”术中都明确提到“綦”，例如对“羡除”(一种楔形体)的体积计算，他就说：“假令用此綦”，“于是阳马之綦悉中解矣”，“按阳马之綦两斜綦底方，当其方也，不问旁角而割之，相半可知也”。另外，象“刍甍”这样的楔形体，如果

不用一些模型不易说清楚，但用"棊"就很好理解。刘徽说："其用棊也，中央堑堵二，两端阳马各二"，就是"刍甍"是由两个"堑堵"和四个"阳马"合起来的。明白了这些，"刍甍"的体积就容易求了。

特别值得注意的是"阳马"术，刘徽在注释"阳马"的体积计算时，不仅使用了"棊"，而且使用了赤、黑两种颜色的"棊"，更为直观。他为了论证《九章算术》中的计算步骤："广、袤相乘，以高乘之，三而一"，从一个立方体着手，逐步进行分解："假令广、袤各一尺，高一尺，相乘之，得立方积一尺。邪解立方得两堑堵，邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑，阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。合两鳖臑成一阳马，合三阳马而成立方，故三而一。"为什么呢？"验之以棊，其形露矣"。用模型一看就明白，于是他说："按邪解方棊以为堑堵者，必当以半为分，邪解堑堵以为阳马者，亦必当以半为分，一从一横耳。设阳马为内分棊，鳖臑为外分棊，虽或随脩短广狭犹有此分常率，知殊形异体亦同也者，以此而已。其使鳖臑广、袤、高各二尺，用堑堵、鳖臑之棊各二，皆用赤棊。又使阳马之广、袤、高各二尺。用立方之棊一，堑堵、阳马之棊各二，皆用黑棊。棊之赤、黑，接为堑堵，广、袤、高各二尺。……"然后继续考虑和推理，结果他注意到："虽方随棊改，而固有常然之势也"。就是说虽然形状有变化，但是其中还有保持不变的东西。

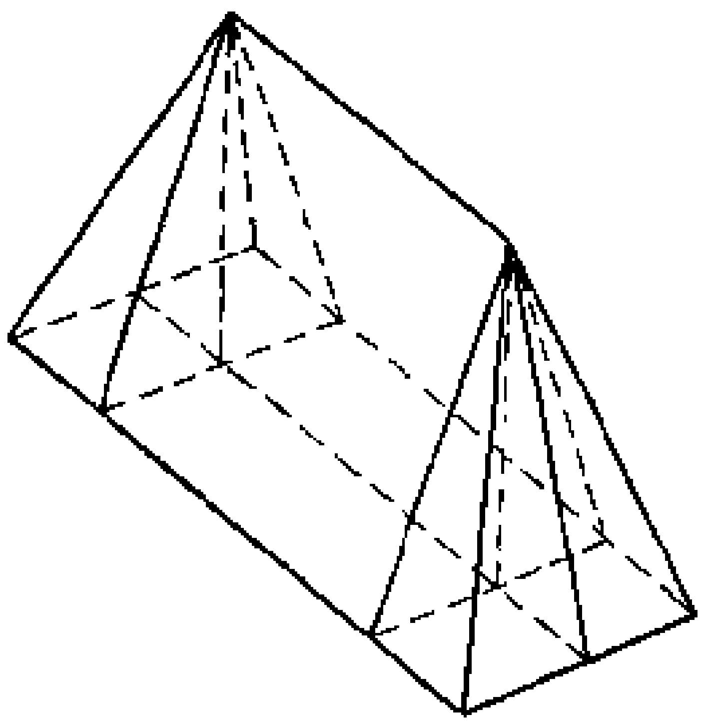


图 4

在有名的"开立圆"术注中，刘徽也使用了"棊"，他首先通过对《九章算术》原来的算法的研究发现："开立圆"公式不对，"何

以验之?"然后用"棊"的办法直观地进行推论。刘徽写道："取立方棊八枚，皆令立方一寸，积之为立方二寸。规之为圆囷，径二寸，高二寸。又复横规之，则其形有似牟合方盖矣。八棊皆似阳马，圆然也。按方盖者，方率也。丸居其中，即圆率也。推此言之，谓夫圆囷为方率，岂不阙哉?"这件事是人们最熟悉的，在这里提出来，目的是强调刘徽的直观方法。如果不用八棊，不提出"牟合方盖"这种形象的比喻，不易说明问题。

总结起来说，刘徽数学推理中所使用的直观方法是灵活多变的，单色图形，多色图形，着色纸片，单色模型，多色模型，可以说应有尽有。使用的范围也不限于几何方面，而且用到开方上，推广到筹算上，"正算赤，负算黑"正是直观方法的表现，有了红、黑两色算筹，正、负就不致混淆了。直观方法的运用，应当说是刘徽的一项重要贡献。

但是，还应说明，刘徽的推理方法和直观方法都是有历史渊源的，他在"衰分"章第一题注中引用过《墨子·号令篇》，可见他很熟悉《墨子》一书，而此书中有丰富的逻辑内容[4]。前面我们提到过，刘徽引用并反驳了"张衡算"，其中的"立方为质，立圆为浑"不能不对他发生影响。

参 考 文 献

［1］吴文俊：《出入相补原理》，《中国古代科技成就》，中国青年出版社，1978，第80—100页，又收入本文集。

［2］洪万生：《刘徽与出入相补原理》，(台湾)《科学月刊》1980，10，11:10。

［3］潘吉星：《中国造纸技术史稿》，文物出版社，1979，第52—67页。

［4］汪奠基：《中国逻辑思想史》，上海人民出版社，1979，第99—122页。

《九章算术》与《几何原本》

李 迪

早在将近半个世纪以前的1939年，日本数学史家小仓金之助博士就认为《九章算术》是“中国的欧几里得”[1]，评价很高。但他没有进行较深入的论述，本文来补做这一工作。

一 两书优缺点的比较

《九章算术》和《几何原本》都是世界上流传最久的数学著作，在东西方数学发展中都产生过深远影响。但是从内容、结构等方面来看，两书的差别很大，各有特点，同时也反映出各书的优缺点。

1. 结构方面 《九章算术》九卷，包括246道题，并按问题的性质和解法分为九大类，每大类为一卷。每一大类又分为几小类，每一小类都有一般解题步骤，这种步骤相当于现代数学中的公式。例如卷一“方田”章，主要讲面积题解法，为了这个需要又讲了各种分数算法，总共分“方田术”、“里田术”、“约分术”、“合分术”、“减分术”、“课分术”、“平分术”、“经分术”、“乘分术”、“圭田术”、“邪田术”、“箕田术”、“圆田术”、“宛田术”、“弧田术”、“环田术”等十六小类每小类都有一般解法，如“方田术”：“广从步数相乘得积步”；“乘分术”：“母相乘为法，子相乘为实，实如法而一”；“圭田术”：“半广以乘正从”等等。其他各章也都如此。所有步骤都是着眼于算法，而未说明理由，各小类之间也没有明显的逻辑联系，但在排列上合乎由简到繁的次序。

每道题都给出答案，大部分没有具体计算过程和演草（因为

当时用筹算，演草不好保留），都可以套用解题步骤求得解答。《九章算术》中的这种作法可以比做现代电子计算机计算中的程序设计，是一种"软件"思想，筹算相应地可以做"硬件"。

《几何原本》的结构与《九章算术》不同，全书十五卷（据说后两卷是后人续加的），由两部分构成，第一部分为"界说"（定义）36条、"求作"（作图公法）4条和"公论"（公理和公设）19条①，是全书的推理基础，列于第一卷之首，另外某些卷的开头有时也有"界说"若干条。第二部分为题，是每一卷的主要部分，每一题都相当于一条定理，题下有"解"（相当于题设和题断）和"论"（就是证明），有的还有"法"（包括"解"，再加上作图步骤）。全书的主导思想是通过逻辑推理把整个内容贯穿起来，基本上形成一个今天看来不很严谨的逻辑演绎系统。就是说《几何原本》中的每一题都要通过逻辑论证，用以肯定题断的正确性。证明所用的论据就是"界说"、"求作"、"公论"和已经证明过的题（定理），其排列层次是分明的。

因此，两书在结构上完全不同：《九章算术》有一套规格化的计算程式，主要是计算，不讲究逻辑证明；《几何原本》有一套逻辑演绎程式，主要是证明，不讲究计算。

2. 应用方面 《九章算术》的246道题几乎全是应用题，如田亩面积计算、各种粮谷的交换、分配问题、土木工程问题、输纳税赋问题、盈亏问题、句股测量问题等等，即使第八卷"方程"讲的也都是应用问题，可以说是一部古代的数学应用问题集。至于这些问题是否都是直接从生产实践或其他实践提出来的，倒不一定，其中有一些可能是人们杜撰的，如"五家共井"、"折竹抵地"等等就属于这一类，但是都有应用的色彩。由此可以看出，写书人的目的主要是为了实际应用。

① 各种文本的名称和条数不完全相同，这里是依据中文译本。

《几何原本》则不同，仅在卷一之首"界说"下有"凡历法、地理、乐律、算章、技艺、工巧诸事，有度有数者，皆依赖十府中"、"几何"为一府，而"凡论几何、先从一点始，自点引之为线，线展为面，面积为体，是名三度。"然后给出36条界说。看来欧几里得认识到几何概念是从客观事物中抽象出来的，几何问题是物质中量的反映。但是欧几里得写《几何原本》的目的显然不是把抽象出来的几何规律再应用于人类社会实践。因此全书十三卷共469题，没有一道是实用性的。

两书相较，在应用方面差别极大，一个全属应用，一个则根本不讲应用。

3．内容方面　小仓金之助认为以《九章算术》为代表的中国秦汉到三国时数学与希腊相比，"几何与数论不如希腊，对于代数与算术（意指丢番图（公元275年左右）以前）则凌驾于希腊之上"。[1]这种看法基本上是正确的，但又不完全正确。

《几何原本》主要讲几何问题，但其中七、八、九三卷讲数论问题，如求两数的最大公约数的方法、素数的个数为无限的证法、无公度的两数(互素)的定义等等。此外也讲到了比例理论、正方形的对角线和一边不可公度。讨论的方式基本上是几何的一套，比例的论述在第七卷以前已经有了关于线段比例的定理。就几何学来讲，希腊当时已经有了一些超越曲线的研究，而《几何原本》没有包括，许多算术(如分数等)也没有收进书中。其书名希腊文为Σροιχεια，而英文为Elements根本没有所谓"几何"的意思"几何"二字是明末徐光启、利玛窦翻译时加上的，并不是译自Geometry，而是借用中国古代的用语。可以推想：欧几里得当时写书时虽以几何问题为主，可是他的原意很可能想包罗其他数学内容，但由于不易纳入他的演绎系统，而略去。据说欧几里得写过有关圆锥曲线的书，或许是纳入不了而产生的作品。就是说，可能是由于书的结构限制了他的书的内容。

《九章算术》的内容没有任何限制，举凡算术、代数、几何以及某些数论知识全包括在内，在一定程度上可以说是我国秦汉时期的数学总汇。其中水平最高的是算术和代数，这是人们基本公认的，但是在几何方面有关面积、体积和勾股测量等度量性问题的水平也不低，特别是有些较复杂体积计算法则是《几何原本》中所没有的，如一些楔形体即是。在数论方面水平不如《几何原本》高，不过有些内容也有涉及，如"两数无等"(互素)，用展转相减法求两数的最大公约数等等都是值得提出来的。

《几何原本》以几何和数论内容取胜，而《九章算术》则以内容丰富多彩见长。

总的说来，两书各有长短，《九章算术》以实用性、计算性和丰富性优于《几何原本》，而《几何原本》则以几何、数论和逻辑性超过《九章算术》。或者基本上可以这样说：《几何原本》之长为《九章算术》所短，而《九章算术》之长又为《几何原本》所短。这既是两书的特点，也大体代表了东西方数学的特色。

二　形成两书不同特点的背景

为什么《九章算术》和《几何原本》同是古代的数学著作、却出现如此明显的差异和形成各自不同的特点？是中国人不懂逻辑，还是希腊人不懂应用？这当然不是的，而是另有原因。

先看中国的情况。在春秋战国时期，出现"诸子百家"，儒、法、名、阴阳、墨等各家不论在政治上或在学术上都提出了自己的主张，互相争鸣，并形成了不同流派，其中名家和墨家懂得形式逻辑，特别是墨家尤为突出，在形式逻辑方面有贡献[3]三国时代的数学家刘徽，逻辑推理的能力很强，可以说运用纯熟，在逻辑方面达到很高水平[4]。然而奇怪的是，墨家到刘徽之间约六七百年，形式逻辑在我国没有发展，可以说是个衰落期，更没有形成我国的逻辑学派。

恰好在墨家之后、刘徽之前这段形式逻辑衰落期间，《九章算术》问世了，因而从学术思潮上就决定了《九章算术》非逻辑结构这个特点。当然，也不能说这部书中一点形式逻辑都没使用，很容易提出的一个问题是书中那些"术"是怎么得到的，估计大多数都是通过经验而来，也可能有一些经过简单的推理，显然没有《几何原本》式的逻辑证明。

秦汉时期土木工程很多，汉武帝时又实行"均输法"，西汉政府又多次下令发展农业[5]，农业得到很大发展，以致每年收获的粮食用不完，需要大量的粮仓贮存粮食，等等，所有这一切都迫切需要应用数学，有力地推动着应用数学的发展与普及。

在秦汉简中有大量应用数学问题，现录几条如下：

"执胡燧卒富凤：

妻：大女年廿八，用谷二石一斗六升大，

子：使女始年十，用谷一石六斗六升大，

子：未使女寄年三，用谷一石一斗六升大，

凡用谷五石。"[6]

这里说的是一名叫富凤的兵卒，他的妻子 28 岁，他的孩子一个 10 岁、一个 3 岁，以及每人所吃的粮食数，其中的"大"应为"太"，就是$\frac{2}{3}$。这是一道分数加法应用题：

$$216\frac{2}{3}+166\frac{2}{3}+116\frac{2}{3}=500(\text{升}),$$

即"凡用谷五石"。

"守望亭北平第九十三町：广三步，长七步，积廿一步。"[7]

这是一道长方形面积计算题，和《九章算术》中"方田术"算法完全一致。

还有一道题更有意义，说的是一名士兵由于各种失职或达不到技术要求而受到七次处罚，于是出现了"负筭"。"负"是亏负，

“箳”是一种税赋单位。原题如下：

“甲渠侯鄣：

大黄力十石弩一，右深强一分，负一箳，

八石具弩一，右弭失，负一箳，

六石具弩一，空上蜚，负一箳，

六石具弩一，衣不上，负一箳，

坞上望火头，三不见所望，负三箳，

坞上望火头，二不见所望，负二箳，

□① 扣弦一脱，负二箳；

凡负十一箳。”[8]

这显然是一道加法题。“负”在这里是个动词，但也正是“负”这一名词的起源。《九章算术》中“正负”数的“负”显然是由这类应用问题演变、抽象而来。此题如在《九章算术》中，再变为现代形式就相当于：

$$(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-3)+(-2)+(-2)=-11.$$

中国古代为什么在世界上最早承认负数？看来主要是从实践中提出的，得、失人们都会经历，极易接受，“得多少”、“失(负)多少”便逐渐形成了相反意义的量，是非常自然的事。

在这种情况下，编写数学书最简便最实用的办法就是《九章算术》的体例，即把应用问题按解题方法步骤分类，再归纳出各类问题统一的解法，应用很方便，编者再杜撰一些题加入其中。可以推想，《杜忠算术》和《许商算术》也可能是这样的体例。很可能《九章算术》就是在此两书的基础上改编而成，由于《九章算术》的编排、分章更加完备，内容更加充实，此两书便会受到“自然淘汰”而不复存在了。

《九章算术》出世以后，受到官方的重视，东汉管理全国农

---

① 此字不清。

业、水利的中央机构"大司农"向全国宣布：度量衡计算以《九章算术》为准[9]。这就大大提高了《九章算术》的地位，它的编制体例也就无形中被固定下来了。

在《几何原本》成书时代的希腊和中国完全不同，最主要的是正处于形式逻辑的发展时期，形式逻辑由柏拉图开始，亚里士多德(公元前384—322年)的工作达到极盛[10]。欧几里得正处于这一时期，把形式逻辑的思想方法运用于数学研究和排斥数学应用在当时形成一种强大的思潮。柏拉图认为：算术"盖此固并有用于哲理与军事也。为军人而不習数，如何能计算其军队之布置，而支配多寡。读哲学而不習数，如何能超出众人之上，而能复得真理"，又说："凡吾侪欲其将来为政治上之重要分子者，当劝之亦研究算术。"他特别强调有数学修养的人比没有数学修养的人为"灵敏"，即使是那些"本性迟钝"的人也好，对于数学，"秉性聪颖之人，尤应尽力研究不辍"。柏拉图反对数学用于实践，他说："盖若辈徒知何谓规矩方圆，徒求其应实施，而视为平常日用之物，岂不可笑，不知几何之目的，乃最高深之知识也。"[11]这里所说的"算术"实际是初等数论。

形式逻辑的发展和反对数学用于实践的思潮对数学的影响是深刻的。柏拉图首先把形式逻辑用于数学，他指出："你知道研究几何学、数学以及这一类学问的人在开始的时间要假定偶数与奇数，各种圆形、三种角，以及其它类似的东西，把这些东西看成已知的，看成绝对的假设，不觉得需要为他们自己或别人来对这些东西加以说明，而是把这些东西当做自明的。他们就从这些假设出发，通过一系列的逻辑推论而最后达到他们所要求的结论。"[12]

亚里士多德更加努力把形式逻辑用于数学，他首先研究了数学概念，他认为锐角概念的定义、半圆的定义都需要根据直角给出，又指出："可是直角的公式不包括锐角的公式，而锐角的公

式依凭于直角，因为人们用直角来界说锐角，说‘锐角是一个小于直角的角’。圆与半圆的关系亦然，因为半圆用圆来界说”[13]。亚里士多德认为抽象的数量“不容许有程度的不同”，三就是三，它不会超过五。“数量的最凸(突)出的标志，是它可以称为相等或不相等的。”[14]但是他不同意毕达哥拉斯学派“将一切事物简化为数”的观点。其次，亚里士多德对于某些几何定理给出了逻辑证明，他认为几何定理之所以能被证明是因为命题中原来就有道理“潜在地内含着”，只要人们把这些潜在的道理画出来，问题就明白了。他和柏拉图一样，认为应当把一些问题承认“理所当然”的假设，“凭此假设为起点，推演他自己的论题。”[15]还说：“在几何学上有些命题不证而明，而其他一切命题或多数命题的证明却有赖于这些命题，我们称这些命题为几何的要素。”[12] 他强调几何学家必须这样做，把这些假设称为公理或通则，它们是“确切无误”的，因而它们可以做为推论的基础，对于那些“进行专门研究的人—如几何学家或“算术家—均不问这些通则是真是假。”[16]

«几何原本»正是在这种情况下出现的，可以说当时特定的学术思潮的必然产物。

三　两书对后世的影响

«九章算术»和«几何原本»对后世都产生过重大影响，起作用的时间都相当长，后者达两千年左右，前者至少也有一千六七百年。

众所周知，«几何原本»在世界流传极广，是长期传播初等几何知识的最主要的教科书，译成各种文字，如拉丁文、阿拉伯文、意大利文、德文、英文、日文、法文、俄文、中文等，有的语种有几种译本、注释本，较有权威的是本世纪初英国 T. L.-Heath 的十三卷英文译本。在欧洲，直到十八世纪，«几何原本»

仍然是必修教材，甚至在十六世纪的一所教堂的壁画上画着当时大学所修七个学科的圣象中欧几里得代表几何，把他与毕达哥拉斯(算术)、托勒密(天文)并列[17]。可见，欧几里得和他的《几何原本》的地位之高。实际上，通过这部书培养了无数的人材，笛卡儿、牛顿等卓越数学家都学习过《几何原本》。在人类文化发展史上所起的作用是伟大的。

不可讳言，总的来说，《九章算术》在历史上所起的作用不如《几何原本》，但是他的影响所及也十分深远。

首先讨论《九章算术》在国内的影响。

(1) 长期成为传播数学知识的教材。《九章算术》从问世时起，人们便从它学习数学，早期基本上都是自学或个人传授，历史上颇不乏人，如马续、郑玄、王蕃、殷绍、刘洪等，最有名的是刘徽，他"幼习《九章》，长再详览"，还有祖冲之父子。隋唐时开始建立国立学校，其中有算学科，《九章算术》被列为重要的教科书[18]。考试时，每书中出的题目多寡不一，《九章算术》与《缉古算经》各三条，除《缀术》为六条[19]外算是最多的。

北宋中期《缀术》失传[20]，《九章算术》就成为最重要的教科书，北宋、南宋都曾刊刻印刷，至今尚流传有南宋刻的残本。明朝初年，《九章算术》又被收入《永乐大典》，其后流传不广。

可以说，从汉到元，我国学习数学的人恐怕没有不学习《九章算术》的。就是后来，人们也都知道有这么一部书。

(2) 古代研究数学的人大都从这书开始，有些人通过对它的研究取得重要成就，成为历史上杰出的数学家，最有名的要数刘徽、祖冲之父子、贾宪，甚至唐初的王孝通也从《九章算术》获得启发。刘徽的成就是通过注解《九章算术》而取得的，有些注文很长，是一些出色的论文。祖冲之父子又在这个基础继续钻研，前进了一大步。王孝通盛赞刘徽，并提到祖冲之的儿子祖暅的工作，他的三次方程解法和祖冲之的《开差立》等，很可能都导源于

《九章算术》的开立方术。贾宪著有《黄帝九章细草》一书(已失传)，他的"增乘开方法"无疑是在掌握了《九章算术》以来有关传统解方程方法的基础上创立的。其他著名数学家的工作，与《九章算术》都不无关系，清朝中期的焦循(公元 1763—1820 年)由于研究《九章算术》刘徽注在算术方面取得成就，李锐也在同样情况下在代数方面提出了新见解。清末大数学家李善兰(公元 1811—1882 年)也是从学习《九章算术》开始的。

通过上列事实说明，《九章算术》不仅在普及数学知识方面起过巨大作用，而且培养了不少数学家。

(3)"九章"体例的形成。《九章算术》在我国的影响还表现在体例方面，在很长时期内人们甚至把"九章"做为数学的代名词。具体影响大体包括两个方面，第一，《九章算术》以后的许多数学书大都按《九章算术》的格式编写，注重实用，不注意逻辑结构，而且都是算题，同时给出一般解法，但卷数大都不是九卷。第二，有些数学书在写法上有了很大变化，内容上、编排上都和《九章算术》有所不同，可是书名却加上"九章"二字，如宋秦九韶的数学杰作叫《数书九章》，明吴敬的著作叫《九章算法比类大全》等等，从魏晋以至明代，用"九章"做为数学书名的做法成为一种风气。在那时数学书上不加"九章"二字似乎身价有所降低似的。无怪乎，直到十八世纪孔继涵还说："《算经十书》各经"皆羽翼《周髀》、《九章》者也。……而胥不能稍出《九章》之范围焉，鸣呼！九数之作，非圣人孰能为之哉？"[21]

中国是东方大国，《九章算术》长期占统治地位，在中国数学中"九章"是一条主线。

其次讨论《九章算术》在国外的影响。

(1) 对日本的影响。《九章算术》对日本的影响非常深远，远藤利贞把日本数学史分为五期，其中第二期（约公元 554—1623 年）一千余年[22]、可以说是"九章"时期。《九章算术》何时传入

日本，现无明确记载，估计至迟是隋代。公元702年日本设立学校，讲授数学，采用中国的制度和教科书，其中包括《九章算术》，教学也分两组，其中一组在考试中规定："凡算学生，辨明数理，然后为通，试九全通为甲，通六为乙，若落《九章》，虽通六犹为不第"[23]。《九章算术》在日本和在中国一样受到重视，占有相当高的地位。

在此期间传入日本的"九章"之书相当多，据宽平时代（公元889—897年）藤原佐世奉勅所撰《日本国见在书目》所记有以下一些：

《九章》九卷[刘徽注]。

《九章》九卷[祖中注]。（按："祖中"当为祖冲之之误，下同）

《九章》九卷[徐氏撰]。（按："徐氏"可能指徐岳）

《九章术义》九（卷）[祖中注]。

《九章十一义》一（卷）。

《九章图》一（卷）。

《九章乘除私记》九（卷）。

《九章私记》九（卷）。

《九法笔术》一（卷）。

后五种都没有提到撰或注者，在我国的文献上也无记载，其中有些可能是《九章算术》传入日本后日本学者参考《九章算术》写成的。这些书名既然包括于"见在书目"中，显然是当时存在着的书。从这个侧面可以看出：《九章算术》在日本的广泛影响。

此外，日本的数学著作，长时期为《九章算术》类型，直到十七、八世纪的关孝和（公元1642？—1708年）、建部贤弘（公元1664—1739年）、安岛直圆（公元1739—1798年）等著名数学家的工作仍与《九章算术》有关系，著作的体例也大都与《九章算术》相仿。

（2）对朝鲜的影响。中朝两国是近邻，山水相连，文化交流

也很频繁。«九章算术»便很早就传到了朝鲜。在"三国"时代的田地、农耕、租税、谷物交换、运输等等，许多实用数学的例子，可能受到«九章算术»的影响[24]。实际上早在七、八世纪时期，新罗的"国学"中设立了算学科，置"算学博士若助教一人，以«缀经»(可能是祖冲之的«缀术»)、«三开»、«九章»、«六章»教授之"[25]，可见«九章算术»已成为朝鲜重要数学教科书。直到十四世纪，朝鲜还把«九章算术»和朱世杰«算学启蒙»、宋代的«杨辉算法»一起，列为国家算学生的必读之书。[26]在较长的一段历史时期内，朝鲜的算学制度参考了中国唐宋时代的一套办法，因此把«九章算术»做为教科是当然的事。

(3) 对越南的影响。«九章算术»也传到越南，对越南数学的发展起过很大作用。1928年十月，青年数学家章用(1911—1939)路过越南河内，趁机在那里的博物馆阅览越南算书，钞回九本，并购回两本。其中有几种，书名冠以"九章"二字，如«九章立成併法»一本，越南范有僊撰，1743年完成，此书又称«立成算法»；还有一种«九章算法立成»，75页，一本，不知作者。[27]章用钞、购回来的这批越南数学书又由李俨节钞，包括两种"九章"在内共九种[28]，现藏中国科学院自然科学史研究所图书室，这是研究越南数学史的重要资料。至于章用的那批书现藏何处，不得而知。总之，«九章算术»对越南数学有过影响，但何时传去的目前还不太清楚。

(4) 对印度和阿拉伯等影响的推测。«九章算术»对印度和阿拉伯等国家是否产生过影响？这个问题还没有明确答案。但是据推测，这种影响可能是存在的。«九章算术»中有关分数运算的法则、"今有术"、计算弓形面积和球的体积公式(后两者都是误差很大的)等都在较晚的印度著作中出现。如果说同样正确的算法各国可以先后各自独立获得，那么出现同样错误的可能性是极小的。«九章算术»的"盈不足术"在印度、阿拉伯的数学书中都可以找

到，很可能传自中国。还有人认为“盈不足术”传到了欧洲[29]。

《九章算术》在古代对其他国家是否产生过影响？目前还不太了解，不好妄断。

综上所述，《九章算术》在东方有过巨大影响，在数学发展上起过作用，把它称之为“中国的欧几里得”是符合事实的。

四 最后结局

不论是自然界还是人类社会的任何事物永占统治地位的事是不存在的，迟早总要发生变化，退出历史舞台。《九章算术》和《几何原本》也不例外，它们都曾在历史上长期分别在东西方数学领域占统治地位，然而现在它们都成了历史陈迹，已被大多数人所遗忘，差不多只有研究历史的人们才知道有这么回事。这是正常的现象，如果现在的学生仍然把《九章算术》或《几何原本》做为教科书去读倒是一件怪事了。

这两部书对近现代数学发展所起的作用，人们公认《几何原本》超过了《九章算术》。如前所述，《几何原本》最主要的特点是它的逻辑结构，把大量的几何定理建立在少数不加证明的命题上。这种思想，在欧洲从十七八世纪以来得到发展，1899年德国数学家D. Hilbert在所著《几何学基础》一本中形成了一套严整的公理法，把欧几里得以来的思想推进到一个新阶段。此后，不仅许多数学分支相继公理化，而且渗透到其他科学领域[30]。《几何原本》对近现代数学的影响是深远的。

《几何原本》之所以起了这种作用，主要是因为用逻辑方法整理已有的数学知识有明显的优点，使各种命题之间形成一个有内在联系的整体，定理的可靠性得到了逻辑上的证明，理论严谨，眉目清楚。因此，《几何原本》本身虽然已经失去价值，但是它的影响却未消失。

《九章算术》对现代数学的影响不如《几何原本》那样明显，是

否毫无影响呢？或者说《九章算术》的体例在现代数学中完全消失了呢？还不能这样说。如前所述，《九章算术》的特点可以概括为三句话六个字，即"题目、公式、计算"。这种特点在现代数学中仍然广泛存在，特别是应用数学更为明显。当然不是《九章算术》的老样子，只是说那种体例并未完全被抛弃，而是还在广泛运用。可以设想：在现代数学中如果清一色的《几何原本》方式，只有定义、公理、定理而没有公式、计算，就失去了它的价值，而没有多少用途了。

这两种影响或说是延续也不是截然分开的，就两书本身来说也不是绝对没有共同之处。《几何原本》中的某些定理具有公式的性质，或者有些问题可以计算；《九章算术》的编排多少也有些逻辑性。因此，我们可以说两书的特点在现代数学中都有体现，但由于人们只看到数学的逻辑结构一面，而忽略应用的一面，使我国的《九章算术》有失色之感。

参 考 文 献

[1] 小仓金之助：《支那数学の社会性》，《改造》，昭和九年（1933）一月号；收入小仓金之助：《数学史研究》，第一辑。

[2] *M.* 克莱因著、张理京等译：《古今数学思想》，第1册，上海科技出版社，1979，第100页。

[3] 汪奠基：《中国逻辑思想史》，上海人民出版社，1979，第104—122页。

[4] 李迪：《刘徽的数学推理方法》，本书。第106—115页。

[5] 《汉书·文帝纪》。

[6] 中国科学院考古研究所：《居延汉简甲编》，科学出版社，1959，第40页。

[7] 同[6]，第67页。

[8] 同[6]，第17页。

[9] 《筠清馆金石记》，卷五。

[10] I. M. Bochenski, Ancient Formal Logic, Amsterdam, 1963, pp. 19—71。

[11] 柏拉图：《理想国》，商务印书馆，1957，第20—24页。

[12] 北京大学哲学系编译：《古希腊罗马哲学》，三联书店，1957，第200页。
[13] 亚里士多德：《形而上学》，商务印书馆，1959，第143—145页。
[14] 亚里士多德：《范畴・解释篇》，三联书店，1957，第23页。
[15] 同[13]，第185—186页。
[16] 同[13]，第61页。
[17] 小仓金之助：《数学教育史》，岩波书店，1932，第7页。
[18] 《唐六典》，卷二十一。
[19] 《新唐书・选举志》。
[20] 李迪：《缀术的失传时代问题》，《数学通讯》，1958，11，91，第33—34页。
[21] 孔继涵：《算经十书序》。
[22] 远藤利贞：《增修日本数学史》，1918。
[23] 李俨：《中算输入日本的经过》，《中算史论丛》，第五集，科学出版社，1955，第168—186页。
[24] 金容云、金容局：《韩国数学史》，槙书店1978，第49—60页。
[25] 金富轼：《三国史记》，卷三十八。
[26] 李俨：《从中国算学史上看中朝文化交流》，《中算史论丛》，第五集，科学出版社，1955，第187—191页。
[27] 李俨：《章用君修治中国算学史遗事》，《科学》，1940，24:11，第799—804页。
[28] 此事实由严敦杰同志于六十年代提供。
[29] 钱宝琮：《九章算术盈不足术传入欧洲考》，《科学》1927，12:6，第701—714页。
[30] L. Henkin等主编，The Axiomatic Method，Amsterdam，1959，pp. 255—488。

《九章算术》在国外

李　迪　沈康身

《九章算术》越来越引起人们的重视，国外研究者也日渐增多。但是目前世界上究竟对《九章算术》及刘徽注文研究到何种程度，迄今未见专文报道。本文打算在这方面作个尝试。为了使读者得到比较全面的了解，所论的时间为本世纪初以来的八十年，至于以前的流传情况将在《总论》及《〈九章算术〉与〈几何原本〉》中加以论述。由于掌握资料不全，文中有所遗漏是难免的，因此一方面希望国内外同行给予补正，另一方面也希望有关的同行给予谅解。

为叙述方便起见，本文分以下三部分。

一　在　日　本

日本是我们的近邻，长期以来文化交流频繁，《九章算术》在日本有深远影响，因此对它的研究也大有人在，本世纪早期的代表人物当推三上义夫(1875—1950)和小仓金之助(？ —1962)二人。三上义夫早在1910年就在伦敦出版了他的第一本数学史著作——《中日数学之发展》，1913年又在德国莱比锡出版。全书共分两部分，第一部分介绍中国古代数学，分为十九章，其中第三章为《九章算术》、第五章为“《海岛算经》或‘海岛’算术问题”、第七章“中国古代数学家的圆周率”都论述了《九章算术》和刘徽的工作，前两章是显然的，而在第七章中则讲了刘徽的割圆术和圆周率。由于这书是用英文撰写的，所以成为欧美学术界了解中国数学史的阶梯，可以说后来许多欧美数学史著作有关中国的部分大

都取材于此书。

1926年三上义夫又写成《支那数学の特色》一文[1]，由林科棠译为中文，题为《中国算学之特色》，1929年收入《万有文库》。该书第五章认为"《九章算术》，为中国古算书中最切要者，又甚古者。"又说"《晋书·律历志》云：'魏陈留王景元四年，刘徽注《九章》。'可知徽为三国末之人，即当于西历二六三年。是书现虽有之，然亦宜再溯若干年数而考察之：刘徽注之序，言'徽幼习《九章》'，是刘徽幼时已有此书。再上溯之，则后汉末之郑玄，汉序列传中，云其通《九章算术》，……是郑玄时已有其书可明知矣。"三上义夫又根据刘徽序，把《九章算术》的"由来"分为三步加以讨论。该书第六章，专论《九章算术》之内容及刘徽注的论述，其中包括刘徽所得到的公式：

合盖之积:球之体积=正方形之面积:圆面积

并指出："祖暅之研究合盖体积之算法，使用刘徽之比例而得圆体积，其能成功，不外追得刘徽之先踪耳。"又说："此一事，可谓中国算学上几何学的处理方法之最高发达；苟与希腊亚奇默德(Archimedes)之积分方法及其所言球与外接圆埼之关系，一比较研究之，亦一趣事也。"三上义夫已经注意到"句股"章中有整数之解法，他说："其一问题中，可视为句股弦之整数解法之萌芽者，亦见于注中，此或《九章》之作者所注意者。"该书第七章又讲了刘徽撰的《海岛算经》，认为"《海岛算经》之草法，即使用各组之相似句股，而进行测量之算法也"。在第八章中，又介绍了刘徽的割圆术和他的圆周率。

1933年，三上义夫又出了《数学史丛话》一书，其中以专节讨论了刘徽对圆周率的贡献，认为刘徽求得 $\pi=\frac{157}{50}$ 和 $\pi=\frac{3927}{1250}$ 两个数值，以及割圆术的具体方法。此外，还有一节对《海岛算经》进行了论述。

在三上义夫的著名的博士论文中[2]，曾用好几节的篇幅论述刘徽的工作，第二十八节专讲刘徽的割圆术，并且指出在刘徽的论述中已经看到了极限思想。在第二十九节中，三上义夫认为刘徽的方锥算法中包括"无限等比级数关系"，在这里再一次提到刘徽的极限思想，发现刘徽关于斜解一个长方体所得阳马与鳖臑的体积之比为二比一，还特别指出刘徽所说"谓以情推，不用筹算"这句非常重要的话。在第三十节中讲刘徽和祖暅之(即祖暅)关于球的体积的算法，明确指出了"幂势既同，则积不容异"这条古代的原理，同时画了不少图形，用以说明问题。在第三十一节中，讲了«九章算术»中的弧田术算法，特别提到刘徽在这方面的工作。

综上所述，可见三上义夫对«九章算术»和刘徽的研究取得许多很好的结果，贡献是相当大的。

小仓金之助的工作主要是在二、三十年代进行的，关于«九章算术»的重要博士论文«中国数学的社会性»最初发表于1933年[3]，第二年收入他的论文集«数学史研究»第一辑，后来此文集曾多次印刷。这篇论文的副标题是：«九章算術を通じて見たる秦漢時代の社会状態»(通过«九章算术»看秦汉时代的社会状态)，由此可见该文的中心思想是十分明确的。小仓对«九章算术»的评价很高，提法也较准确，他指出：«九章算术»的"有些部分，可能是先秦时代已经存在。及至秦(公元前246—207)、汉(公元前206—公元220)时代经过几次增订而成的。特别是进入三国时代，魏刘徽于公元263年(有可能进行了改订编辑)加以注解。因此对«九章算术»的研究，恰是所说的'可以考察秦、汉、三国，五百年间的数学发展史'。"又说："«九章算术»是中国的基本数学书，其中包含着优秀的数学的方法。如果同希腊数学进行一番比较的话，几何与数论虽然不如希腊，可是我确信算术和代数[意指丢番图(约公元275年左右)以前]则凌驾于希腊之上，"。小仓还认

为《九章算术》直到清朝末年都是中国数学的代表性的古典，恰如"中国的欧几里得"。

全文分四节，后三节是重点，其中分门别类地论述了《九章算术》中与当时社会有关的问题，即"田地、耕作"、"土木工程"、"谷物和食物的交换"、"工艺"、"物价"、"利息"、"运输"、"租税"、"关税"以及"关于官僚的插话"。每一类都举出若干例题进行必要的分析。象小仓这样研究《九章算术》在历史上还是第一次。不过他的讨论仅限于《九章算术》本身的内容，没有使用其他有关文献。

1938年，小仓金之助又发表了《中国数学的特殊性》一文[4]，后来收入他的《数学史研究》文集中也提到《九章算术》，并在前言中刊出了《九章算术》"方程"章的书影。

1942年，加藤平左工门出版了一部篇幅很大的《行列式及圆理》，分为两部分，第一部分为"行列式"，第二部分为"圆理"。"圆理"的第一编第二章讲刘徽及割圆术，《九章算术》的弧田术以及对刘徽注的解释，此外也讨论到球的体积的研究，同时也指出了刘徽的结果，球的体积：合盖的体积＝3(π)：4。

日本学者对《九章算术》的学习研究，长期以来都是根据汉文本，没有翻译成日文。此种翻译直到七十年代才开始，大矢真一将《九章算术》的本文于1975年进行了翻译，收入中央公论社出版的世界名著(丛书)续Ⅰ《中国の科学》(由数内清主编)中，但未译刘徽注。1975年2月到1976年4月又在《数学セミナー》连续发表清水达雄的《九章算术》日译文，和大矢真一一样，也未翻译刘注。

1978年，朝日新闻社出的《科学名著》第二册《中国天文学·数学集》，共收入中国名著的日译本，有刘徽注的《九章算术》、《周髀算经》、《灵宪》、《浑天仪》和《晋书天文志》，前一本由川原秀城译，后四本都是由桥本敬造翻译的。此外，还有"解说"三

篇，即薮内清的《中国の天文学と数学》，川原秀城的《〈九章算术〉解说》和桥本敬造的《ひらかれた宇宙論——解説にかえて》。

薮内清的"解说"针对全书，包含天文学和数学两方面的内容。全文为四节，第一节为《九章算术》，第二节为《刘徽の注释—附·海岛算经》。对《九章算术》和刘徽注做了比较详细的说明，把各章的内容进行了较多的介绍，并给出了较高评价。他特别同意小仓金之助对《九章算术》的看法。

薮内清对刘徽的数学成就也给予了充分肯定，他引用了三上义夫的一句话，对刘徽的工作给以评价，刘徽是古今东西"数学界的一大伟人"。然后薮内清介绍了刘徽的割圆术、阳马术、重差术。对于阳马术，薮内清认为刘徽使用不同颜色的小模型研究问题很巧妙，特别是他的无限分割方法是一种直观的几何方法，象圆周率的算法那样分割的结果有极限值存在，对于《九章算术》刘徽注和《海岛算经》中的测量问题则讲述了秦汉到晋初整个测绘学的发展，以说明刘徽工作的背景

川原秀城的翻译的最大特点主要是把刘徽注同时全部译出，这是其他译本所没有的。并且明确指出：自己的翻译是"以刘徽为中心"，因为《九章算术》原文已经有了大矢真一和清水达雄的两个译本可以利用。他把原文和注文分的很清楚，凡注文在开头都加上"刘徽注"三个字。但是李淳风注没有翻译。此外译者还做了两件重要工作，第一，凡是需要图形说明的问题，都补绘了图形，用长方形圈起；第二，作了大量的注解，或说明补图的根据。《海岛算经》也同时被译为日文，附于《九章算术》译文之后，同样有注解（其中包括一些校改）和示意图。工作做得很细致很深入。

川原秀城写的《〈九章算术〉解说》是一篇有关《九章算术》及刘徽注、《海岛算经》的较重要的论文。此《解说》分为"关于《九章算

术》和"关于算学"两部分，前一部分讲了十二个问题，对《九章算术》的流传、历代研究和内容都进行了简要地叙述，特别提到戴震(公元 1724—1777 年)从《永乐大典》把《九章算术》辑出的工作。后一部分又分七项，对《九章算术》中所提高的"算学"事项予以解释，第一项解释"筹"、"筹算"等算具，第二项讲汉代的筹算制度，第三项讲"正算赤，负算黑"，第四项讲筹算法，第五项讲"九九"口诀，第六、七项讲筹算方法。所有这些都是为了更好地理解《九章算术》而做的准备。

综上所述，川原秀城在大矢真一、清水达雄的基础上进一步把刘徽注和《海岛算经》译为日文，同时做了大量注解和较详细的解说，因此这个译本是所有外文译本中最好的一种。

日本对《九章算术》的介绍和研究较其他国家为盛，除上面所提各位学者外，象薮内清、冈部近等也在著作中讲到了《九章算术》、如前者于 1974 年出版的《中国的数学》(中国の数学)，后者于 1978 年出版的《数学史趣味》((数学史にひろう)中都把《九章算术》立为专节进行介绍。

因此，《九章算术》和刘徽，在日本是人们比较普遍了解和关心的。

二　在苏联及东欧

苏联及东欧各国对《九章算术》和刘徽的研究，大约开始于五十年代。А.П.Юшкевич 所作的题为《中国学者在数学领域中的成就》的报告，1955 年刊载于《数学史研究》第八卷和《中国科学技术简史》丛刊。有中译文载于《数学进展》第 2 卷第 2 期(1956)，第 256—278 页。这篇报告用了较多的篇幅讲述《九章算术》和刘徽的工作，А.П.Юшкевич 认为《九章算术》是"由张苍于公元前第二世纪前半叶及后来耿寿昌于公元第一世纪中叶所加工完成的"，其内容多种多样，并说"就实质而论，这是一部为工程师、土地

丈量员、商贾、天文学家等人而编纂的数学知识百科全书。”他认为最使人感到特殊兴趣的是《九章算术》中的代数部分，因而较详细地介绍了有关线性方程组的解法，并指出：“在《九章算术》第八章中，破天荒第一次在科学史上看到了正量与负量的区分。”他还特别称赞说：“负量及负量运算法则的发明是大约生活在二千年以前或更早的中国学者的最伟大的成就。这是第一次越过了正数域的范围。中国数学家在这一点超出了其他国家的科学几世纪之久。”关于二次方程问题也是 А.Л.Юшкевич 所注意的主要问题之一。此外，对刘徽的割圆术和《海岛算经》也都进行了较详细的解说。

А.Л.Юшкевич 于 1961 年出版了《中世纪数学史》，第一章讲中国数学，其中用将近二十页的篇幅介绍《九章算术》和刘徽的某些工作。后来这部书被译为德文和英文，在向西方传播《九章算术》和刘徽工作方面，无疑起了一定的作用。

后来在苏联的许多数学史著作中都不同程度的介绍了《九章算术》和刘徽。В.Д.Чистяков 在《中印数学史料》(1960)的第 1 部分“中国数学史料”中有一节专论《九章算术》，按章依次讲了该书的大致内容。作者还常常把一些问题加以归纳、分类，例如把“方田”章分为十一类，其中有四类属于各种平面形面积的计算，七类属于分数各种计算法则。在“少广”章，作者特别称赞其中关于开平方和开立方过程中所涉及到的代数计算，但将这种计算步骤比做后来的“鲁菲尼——霍纳法”是不恰当的，这可能是由于作者尚未了解到《九章算术》开方方法真谛的缘故。此外，书中还引录了《九章算术》的问题全文。该书第 1 部分第三章讲中国代数的成就，就中第一节为“方程”法则，就是讲《九章算术》“方程”章的线性方程组解法，并且用矩阵表示。第二节为“引入零”，认为中国于一世纪初在“方程”章中用零表示无。第三节讲正负数运算法则，第四节讲中国古代对负数的解释。第五节讲不定方程。这些

内容都是出自《九章算术》的。第四章，讲中国古代在几何学与三角学方面的成就，其中包括刘徽的圆周率和他的“重差术”。第五章为“中国古代几何定理”，其中第一节讲“句股定理”，除《周髀算经》的部分内容外，主要是《九章算术》中有关句股定理及其应用。同一章第二节讲中国古代、主要是《九章算术》中的“毕达哥拉数”，对于“句股”章第 14 题进行了详细解释，得出了方程 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解相当于

$$z=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2},\quad y=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2};\quad x=\alpha\beta$$

其中 α、β 都是整数。第三节讲二次方程解法，第四节讲《九章算术》中的各种面积算法，第五节讲各种立体体积的算法，第六节介绍一些与直角三角形有关的问题。对《九章算术》讲的比较全面，但对刘徽的工作则涉及甚少。

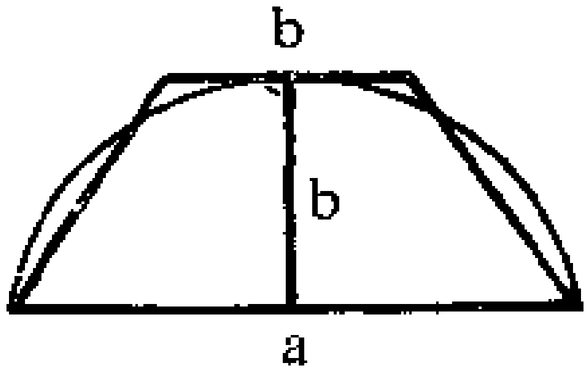
同一年(1960)，К.А.Рибников 出版了他的《数学史》第一卷，其中第七讲为中国和印度数学。关于中国部分，重点介绍了《九章算术》，其中包括“少广”中有关球径的不精确公式、“盈不足”术，线性方程组解法，二次方程解法、句股数问题以及方程 $x^2+y^2=z^2$ 有整数解问题，也简略地介绍了刘徽的割圆术。

1979 年出版的 Б.В.Болгарскич 的《数学简史》中第二章有一节“中国古代数学”，对《九章算术》也有简短介绍。

在苏联，研究《九章算术》和刘徽的代表人物为 Э.И. Березкица，她于 1957 年把《九章算术》的俄文译本发表在《数学史研究》第十册上，前面有华罗庚的一篇《〈九章算术〉俄文版序》和译者 Э.И.Березкица 的《论〈九章算术〉》一文，并对译文作了许多注解。此后苏联学者有关《九章算术》的研究、介绍，可以说主要是根据这个译本。但是，这个译本只包括《九章算术》的 246 道题、答案和原书的解题法则，十分重要的刘徽注，则没有译出。后来，她把刘徽的《海岛算经》也全译为俄文，并对刘徽在几何方

面的注文译出发表[5]。下面先介绍一下她在这方面的工作。

她认为《九章算术》是西汉时代（公元前206——公元前7年）一部重要的数学文献，并且与欧几里得的《几何原本》相提并论。重要的是她的译注，这里部分地反映了译者对中国古代数学和特别是对《九章算术》的理解和认识。在"方田"章中她用欧几里得算法解释了"约分"术，对"弧田"术的解释，把公式 $S=\frac{ab+b^2}{2}$ 改为 $S=\frac{1}{2}b(a+b)$，就是相当于上、下底分别为 b、a，高为 b（如右图）的梯形面积。在"少广"章中她对开平方和开立方的步骤给出了非常详细的解释，这给苏联人了解这部分内容提供了莫大的方便。对"商功"章的某些注解也十分重要。对于"方程"章中的线性方程组解法的注解全用矩阵变换，对其中的正负数加减法则的记载给予很高的评价，她认为这"标志着中国古代数学的高水平"。对"勾股"章的注解，同样提出了一些很有价值的见解，前面提到的方程 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解的一般表达式在苏联就第一次出现在这里。所有这些注解，对后来的苏联学者都不同程度地产生了影响。



1980年Э.И.Березкица出版了一本《中国古代数学》，全书311页，分为五部分，其中第一部分的第二章讲古代的《算经十书》。在这章中有一节讲《九章算术》，除对全书进行概括地介绍外，还简要地叙述了各章的内容，在另一节则专讲"刘徽关于实用几何的著作"，所谓"实用几何"就是指《海岛算经》，把书中的九道题进行了分类，并对全书给了一般说明，但没讲具体算法。在以后的几部分中涉及《九章算术》和刘徽工作的内容相当多，而且都属具体问题。第三部分的第一章，讲到了《九章算术》中的分

数算法、和刘徽的研究，第三章第十二节和十三节都讲到了《九章算术》的有关内容，后一节对“粟米”章的问题有较详细的介绍。第四部分为代数，对《九章算术》中的代数内容讲得很详细，其中包括线性方程组解法、正负数加减法则、不定方程（五家共井问题），“盈不足”问题并与其他国家的同类问题进行了必要的比较，开平方和开立方的方法以及二次方程等也都有所论及。最后一部分讲中国古代的几何，主要是介绍《九章算术》和刘徽的成果，特别是刘徽对面积和体积公式的推导给予了很大的注意，这是过去苏联很少提到的事实。该部分的第二章讲句股定理，其中第七节“句股术”主要讨论《九章算术》第九章“句股”章的内容，第八节为“句股数”，就是关于不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解问题。第十节讲刘徽的割圆术和他的圆周率。该书第四章第十二节为相似句股测量，第十三节为刘徽的“重差术”，论述得很详细，很具体。

总之，这部书对《九章算术》和刘徽的工作论述较多，是一个很大的进步，但对刘徽的成就，介绍得仍然不够。

在苏联，还有其他一些论著中，也多少介绍过《九章算术》和刘徽，这里不多论述了。

按照目前的说法，属于东欧的其他国家也对《九章算术》和刘徽做过某些介绍。

1956 年在华沙出版了波兰学者 Edward Koflar 著的《数学史》一书，其中仅介绍了《九章算术》的某些内容，对刘徽的工作则很少涉及。

1962 年德意志民主共和国科学院理论数学研究所由 J. Mans 和 H. L. Schmid 主编了两卷本的《数学辞典》，共两千余页，在第一卷中立专条介绍《九章算术》，对刘徽的研究成果也立有专条。

三 在美国和西欧

在西方接触《九章算术》最早的学者是D.E.Smith，1914年他与三上义夫合著的《日本数学史》在美国芝加哥出版。由于日本数学与中国数学的关系密切，因此该书用了63页的篇幅讲述中国古代的数学，其中第9—14页介绍《九章算术》及其内容。

1925年，D.E.Smith出版了著名的两卷本《数学史》，对中国传统数学很是赞赏，上卷有九处、下卷有八处论述中国在数学领域内的成就，推崇刘徽、祖冲之等人的工作。该书上卷的第二章全文译载了《九章算术》的章名，并对每章的内容也作了简要地描述。D.E.Smith认为这部书"是中国古典数学中最大的、长时间在东洋保持最高评价的著作"，并且说："从许多事实证明中华民族是富有才华的，中国人是建立早期数学科学的先驱者。"上卷的第四章中讲到刘徽和他的《海岛算经》，同时认为这部书中有关测量高度和距离的叙述，其规则都可以用代数公式表示，这里也提到刘徽注《九章算术》的问题，但没有详细叙述注解的内容，估计当时他还不了解。

与D.E.Smith同时代的另一位著名美国数学史家F. Cajori，于1922年出版了与Smith的著作齐名的《数学史》。该书有七页篇幅介绍中国古典数学概貌，对《九章算术》有简短说明，同时作者还推测了古代中印数学交流问题，他说中国古代为印度支付过一笔文化财富。当F.Cajori谈到《九章算术》"方田"章弓形面积公式时，他说同一公式在后来摩诃吠罗(Mahavira)的著作中找到；当谈到"句股"章折竹问题时，他说在六世纪印度书中也可以找到。

1948年，美国的Dirk. J. Struik在纽约出版了一本《数学简史》，于1956年被译为中文出版。该书的第二章第七节讲中国数学，但正如作者所说的那样："研究古代中国数学由于缺乏令人

满意的译述而大大地受到限制”，因此讲得十分简略，只笼统地提到《算经十书》，并指出与三角学有关的《海岛算经》。关肇直在评介这部书时着重提出了这个问题[6]，因此 D.J.Struik 再版该书时便加强了这方面的内容。

七十年代，美国出版了一部《科学家辞典》，其中有“刘徽——三世纪中国数学家”专条，较详细地介绍了刘徽的成就，执笔人为何丙郁(Ho Pen York)，现在澳大利亚。

1976 年美国缅因大学的 Howard Eves 在一本数学史著作中也简短地介绍了《九章算术》，他说：“中国古代数学中最重要的《九章算术》起源于汉代，而且很可能包含汉代以前的一些材料。这是一部包括 246 个问题的总集，内容涉及农业、贸易、工程、测量，解方程与直角三角形的性质。书中给出了问题解法，但无希腊式的证明。其中卷一第 36 题，弦为 b，矢为 s，圆弧形面积公式为 $s(b+s)/2$，当面积为半圆时，可导出 $\pi=3$。还有一些线性方程组问题，其解法相当于我们现在的矩阵法。这部著作中一些问题的例子，可参见‘问题研究’7.1 和 7.2。”[7]①

在英国，于 1956 年由王铃(Wang Ling)把《九章算术》译为英文(刘徽注未译)，同时发表了《〈九章算术〉和汉代期间的中国数学史》一书，把《九章算术》作了详细的介绍。

1958 年，J.F.Scott 出版了《数学史》一书，1981 年商务印书馆出了中译本，其中的第五章讲印度和中国古代数学，对《九章算术》的内容有简略叙述，作者认为中国数学在汉朝得到了复兴，“这种复兴气氛由于《九章算术》的发表而达到了最高峰”。但是他把这种复兴的原因归之于希腊文化之开始传入中国，显然是没有根据的。

英国对《九章算术》进行较深入研究的是李约瑟（J. Need-

① 此项资料系李兆华提供。

ham)，1959年他出版了巨著《中国科学技术史》的第三卷。这卷的前168页为数学部分，其中对《九章算术》论述较详，并选引了不少例题。李约瑟认为："在以后整个中国历史中，人们代代相传地研究《九章算术》"，"《九章算术》可能是所有中国数学著作中影响最大的一部书。"他还对《九章算术》的成就，在世界数学发展史上的地位和作用提出论据可靠而有说服力的看法：

"开平方和开立方的近代方法欧洲直到1340年前后才有M. Planudes发现"。

"在印度，婆罗笈多(七世纪)最先提到负数，在欧洲第一部圆满论述负数的著作是1545年Gr. Cardano的大法(Ars Magna)。"

"关孝和在1683年在著作中对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述，在欧洲莱布尼兹第一次提出行列式，所以提出行列式的功勋应该归功于关孝和，而关孝和思想的产生多半受惠于中国。"

"双假设法这个方法可能起源于中国……，这个方法的确就是中国的盈不足术。"

"羡除公式$\frac{1}{6}(a+b+c)hl$欧洲人误以为是勒让德首先的。"

"葭生池中央题也出现在后来印度著作中，并且还传到中世纪的欧洲。"

李约瑟对刘徽注《九章算术》有所提及，对他的成就很少介绍，仅对他的《海岛算经》有较详细地论述。他说：《海岛算经》的另一名称是"重差"，可直译为"二重差分法"，即相似直角三角形的性质。全书的内容都是高度和距离的各种测量法，必要时，可用竖立的测竿和与它垂直的横木当工具。李约瑟把该书九个问题概括为九种情况，如"从海上测量岛屿高度"、"测量山上树高"、"测量远处一个有城墙的城市的大小"，等等，并且指出："不管在军事

上或非军事上，这些测量的意义都是显而易见的。”同时他又指出，那种把这部书描述成“实用三角学中的九个问题”的作法是一种误解。

在法国，最早接触中国古典数学的是赫师慎(L.van H'ee)，他从本世纪初到三十年代发表了一系列有关中国数学史论文，介绍过《九章算术》，并且在1920年把《海岛算经》译为法文，1932年他又撰文进行介绍[8]。

1971—1978年，法国出版了二十卷本《拉胡斯大百科全书》，彩色本。其中对中国传统数学屡有论述。例如在第一卷“代数”专条内多处介绍了创自我国《九章算术》的成果：(1) 认为双假设法源于盈不足术，后来辗转传到阿拉伯、欧洲，称为 Al-khat-aym (来自中国的算法)；(2) 由于有彩色条件，专条中用红色筹码表示正，黑色筹码表示负介绍我国古代在有理数方面的运算法则，印刷得很是醒目。(按：用红、黑表示正、负的作法创自刘徽)；(3) 辟专栏全文译载《九章算术》卷八“方程”第一题。

在西德，1968年 K.Vogel 把《九章算术》译为德文出版，不过所译的仅是《九章算术》本文，而刘徽注则没有翻译。译者对于《九章算术》给出了很高的评价，说该书成于公元前一世纪，为一水平很高的数学著作，对后世中国数学有深远影响。在古代算术书中，包括如此丰富的246个算题，现存埃及、巴比伦古籍与之相比则望尘莫及，以希腊来说，所保存的古算题也属于后希腊和拜占庭时代。”

近年来对《九章算术》和刘徽进行研究的主要学者是丹麦的 D.B.Wagner(华道安)，他原在丹麦哥本哈根大学东亚研究所工作，现在在斯堪的那维亚亚洲研究所从事中国数学史研究。他对中国数学史的研究大约开始于七十年代中期，主要是研究中国早期由汉至唐数学之发展。并重点研究刘徽等人在数学方面的论证。”[9]

D.B.Wagner 从 1975 年以来写了四五篇有关刘徽数学证明的论文，目前我们见到的有两篇，就西方的研究来说水平都很高。1978 年他发表了«刘徽和祖暅之论球的体积»[10]①，对球的体积的研究进行了深入探讨。全文共分七节，其中第一节是对从«九章算术»到刘徽的研究简介，第二、第三节最为重要。第二节是"刘徽和祖暅之对 Cavalieri 定理的运用"，他指出："不论怎样处理球的体积，都必须运用无穷小的思想"，"祖暅之明确地使用了一个等价于 Cavalieri 定理的假定"。但是 Wagner 认为在祖暅之以前，他的先驱者刘徽已经几次以一种含蓄的形式运用过它，并特别指出球的体积与其外切"牟合方盖"的体积之比等于它们的横截面的面积之比，即 $\pi:4$。第三节则把刘徽和祖暅之的证明进行了较详细的叙述，最后导出公式 $V=\frac{\pi}{6}d^3$，他说："这个结果是正确的。"

Wagner 的另一篇论文«三世纪刘徽关于锥体体积的推导»，1979年发表于«国际数学史杂志»第六卷第二期[11]。这篇论文包括"引言"正文和"结语"也是七节，他在引言中指出："中国人最初证明数学命题的尝试，在西方是不大了解的。试图超越实际计算从而使数学达到更抽象和更理论化的数学家中可以举出：刘徽(三世纪)、赵爽(三世纪)、祖冲之(429—500 年)、祖暅之(祖冲之之子)和王孝通(七世纪)。对刘徽的工作给予很高的评价，认为"刘徽实际上使用了极限方法"。在第五节中，他对«九章算术»第五"商功"章第 15 题求"阳马"体积的问题和刘徽注作了详细地讨论，特别指出："鳖臑中两个堑堵的体积之和，很明显是阳马中一个长方体与两个堑堵体积之和的一半。这样只剩下证明，鳖臑中的两个鳖臑的体积之和是阳马中两个阳马体积之和的一半。""这些小的鳖臑和阳马又可以再一次地…那样分割。这种分割又产生一些其体

① 这篇论文已由李兆华译为中文现尚未发表。

积恰是所求的比率的部分，还加四个更小的鳖臑及四个更小的阳马。这些小鳖臑和阳马又可以按同一方法分割。继续这个过程到极限，我们就证明了 Y＝2P。"其中 Y 和 P 是由同一个堑堵斜切成的阳马和鳖臑的体积。值得注意的是 Wagner 接着考察了刘徽这种思想的背景，他认为可能是受«道德经»和它的早期的注的影响。并列举一些事实来说明这个问题。另外， Wagner 把"商功"章的刘徽注全部译为英文，准备出版。他的工作水平，比三上义夫的同类工作有一定提高。

在瑞士，苏黎世大学的一位数学史教授撰文对«九章算术»给予很高的评价，他认为与«九章算术»同时期的巴比伦后期数学相比，«九章算术»是超过他们的[12]。

通过以上的介绍，可知«九章算术»和刘徽在世界上被研究的情况，总的趋势是越来越受到重视，研究者越来越多。对刘徽的研究，主要是近二十年来的事，估计今后当有更多的研究论文出现。

此外，象不久前南朝鲜出版的«韩国数学史»中也提到了«九章算术»，还有其他一些论文讨论过刘徽的割圆术等等，这里不再详细介绍了。

参 考 文 献

［1］三上义夫：«支那数学の特色»，«东洋学报»，1926，第十五至十六卷。

［2］三上义夫：«关孝和の业绩と京坂の算家并に支那の算法との关系及び比较»(六)，«东洋学报»，1933～34，第二十二卷，第54—99页。

［3］小仓金之助：«支那数学の社会性»，«改造»，1933年9月。

［4］小仓金之助：«中国数学の特殊性»，«科学»，昭和十五年(1938)五月号。

［5］Э.И.Березкина，Два текста лю Хуэя геометрии(публикаци)，Ист—Мат.иссл.，1974，вып.XIX，с.231—274.

［6］关肇直：«对一部科学的数学史的要求—评 D.J.Stuik 著 A History

of Mathematics», «数学进展»1956, 2:2, 第296—304页.
[7] Howard Eves, An Introduction to the History of Mathematics, Fourth Edition, 1976, P.173.
[8] L. van Hée (赫师慎), Le Classigue de I'Ile Maritime, ouvrage chinois du III^{e} Siécle., Quellen u, Stuliem z. Geschichte d. Mathematik(Abt.B, Astronomie), 1932年第2期.
[9] N. Sivin Chinese Science 1975, I, p. 50。
[10] D.B.Wagner, Liu Hui and Tsu keng-chih on the Volume of a Sphere, Chinese Science pp. 59—79.
[11] 郭书春将此文[10]译为中文，载«科学史译丛», 1980年第2期, 第1—15页。
[12] 严敦杰：«关于中国数学史二三事», «读书», 1981年第8期, 第15—18页。

《九章算术》与刘徽的几何理论

白　尚　恕

我国几何学的形成，不但有悠久的发展历史，内容十分丰富，且别具一格。

春秋战国以前的我国几何，只是一个雏形，都是一些分散而片断的几何知识。到了秦汉时代，我国几何学基本上约定俗成地自成了体系。《九章算术》中有关几何部分是我国几何学的发展中心，它典型地代表了我国几何学所具有的特色。

由于我国几何偏重于实际应用，对于几何的理论重视不够，论述不足，因而难免引起人们的误会。但是到了三国时代，赵爽对《周髀算经》作了注释，刘徽对《九章算术》写出了注文，使得我国几何向前推进了一大步，不仅有严密而精巧的论证，还有许多杰出的创造发明，在我国数学的发展上起到了极其辉煌的作用，在世界数学的进展中，也是不可磨灭的。

《九章算术》里几何部分的经文及注文，都是在方圆平直的实际基础上，提高到理论以后，又转过来为实际服务。因而便侧重于面积、体积和长度计算的研究，而不同于西方的几何，所以对于它的理论结构是很有必要进行探讨的。

一　面积计算的理论

《九章算术》研讨图形面积计算的问题，主要集中于方田章。

方田章把面积作为基本概念，把长方形面积的计算法则作为基本法则。如方田术"广从步数相乘得积步"。刘注说"凡广从相乘谓之幂"。其中"广从步数相乘"、"广从相乘"就是长方形面积

的计算法则，而"积步"及"幂"就是长方形面积。虽然李淳风提出了"积"、"幂"应是两个不同概念的看法，但实际上这是一个统一的不定义名词。

至于"方田"、"圭田"、"邪田"、"箕田"、"圆田"、"句股"、"宛田"、"弧田"、"环田"、"六觚"、"十二觚"等都是一些象形名称，认为是人所共知的图形，在《九章算术》里没有必要加以界说。《周礼·春官》说"王执镇圭，公执桓圭，侯执信圭，伯执躬圭，子执谷璧，男执蒲璧。"李籍《音义》也说："圭田者，其形上锐，有如圭然。"可见"圭田"就是象形名称。同时也认为"广"、"从"、"正从"、"周"、"径"、"面"、"弦"、"矢"等名称没有必要在《九章算术》里重费笔墨。

"容"就是容纳，《九章算术》对于"内接"或"内切"的概念没有严加区分，而是统称为"容"。例如"方中容圆"、"圆中容方"、"句中容圆""句中容方"即是。

在方田章的面积推导中，刘徽使用出入相补原理，即是割补法，把图形变成与之等积的长方形，按长方形的面积算法再推证其图形的面积算法。他先把等腰三角形变为等积长方形，再把筝形按等腰三角形面积算法推证其算法，然后按筝形面积算法证明了圆面积算法。另外，他又从直角梯形导出等腰梯形的面积算法，从而验证圆环形面积算法。例如圭田术为"半广以乘正从"。刘徽证明说"半广者，以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广。"

刘徽大意说，以句股形Ⅰ补入句股形Ⅱ，就可使等腰三角形变成等积的长方形。（图1，2）从而证明了：

$$\text{等腰三角形面积}=\frac{\text{广}}{2}\times\text{正从}=\frac{\text{正从}}{2}\times\text{广}.$$

在论证了等腰三角形面积求法以后，对于由等腰三角形组成的图形面积求法，并不是把其中各个等腰三角形都变为长方形，而是利用等腰三角形面积求法进行推证的。例如在割圆术里，由

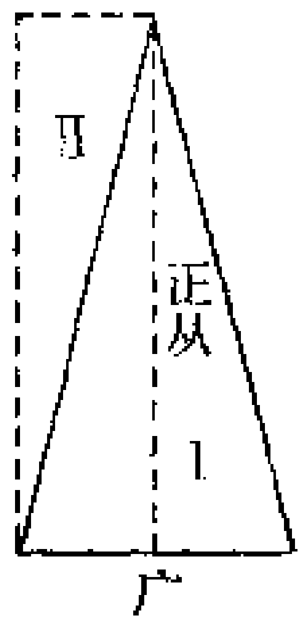


图 1

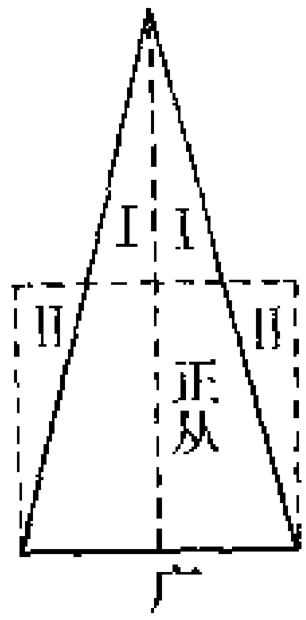


图 2

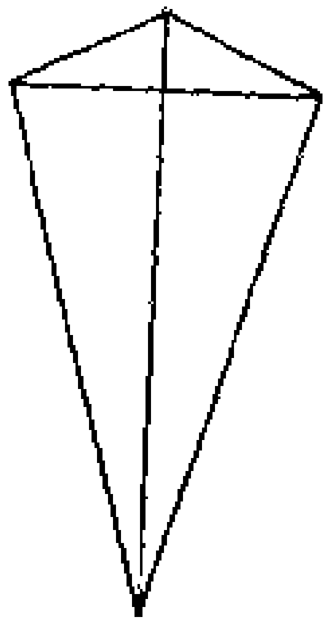


图 3

"觚面之外，犹有余径。以面乘余径，则幂出弧表"。"即九十六觚之外，方田九十六，所谓以弦乘矢之凡幂也"可知，刘徽似是按等腰三角形面积算法推证筝形面积算法的，于是他只说明筝形面积等于其对角线乘积之半(图 3)。并求出一些筝形面积为：

$$\frac{1}{2}a_6r,\frac{1}{2}a_{12}r,\ \frac{1}{2}a_{24}r,\ \frac{1}{2}a_{48}r,\ \frac{1}{2}a_{96}r.$$

其中 a_6、a_{12}、a_{24}、a_{48}、a_{96} 分别是圆的内接正 6 、12、24、48、96 边形的一边，而 r 是圆半径。

对于直角梯形、等腰梯形的面积求法，则采用割补法，使之变为等积的长方形。《九章算术》邪田术为："并两邪而半之，以乘正从若广。又可半正从若广，以乘并"。箕田术为："并踵舌而半之，以乘正从。"刘徽则分别证明为"并而半之者，以盈补虚也。""中分箕田则为两邪田，故其术相似。又可并踵舌，半正从以乘之"(图 4、5、6、7)。

刘徽就这样用割补法论证了邪田及箕田的面积算法。

对于圆内接正多边形的面积算法及圆面积的算法，也是间接使用割补法论证的。如刘徽由圆内接正六边形推求正十二边形面积算法时说："以六觚之一面乘半径，因而三之，得十二觚之幂"

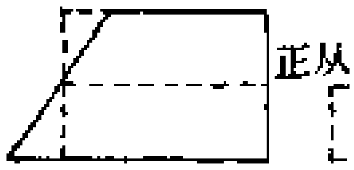


图 4

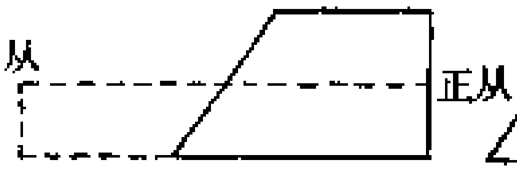


图 5

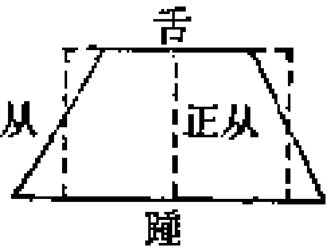


图 6

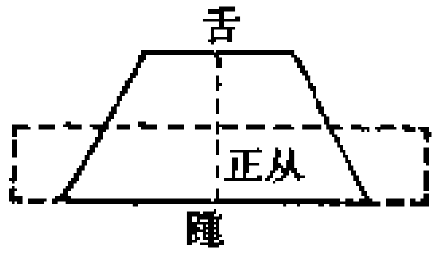


图 7

（图 8 ）。即：

因　筝形 $OBCA=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OC=\frac{1}{2}a_6\cdot r$，故得正十二边形的面积为：

$$S_{12}=6\left(\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OC\right)=3\ a_6 r.$$

由圆内接正十二边形推求正二十四边形面积算法时说："以十二觚之一面乘半径，因而六之，得二十四觚之幂"（图 8 ）。即：

因　　　筝形 $OCEA=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot OE=\frac{1}{2}a_{12}\cdot r$，

故得正二十四边形面积为：

$$S_{24}=12\left(\frac{1}{2}\cdot AC\cdot OE\right)=6\ a_{12}\cdot r.$$

仿此，因　筝形面积分别为 $\frac{1}{2}a_{24}\cdot r$，$\frac{1}{2}a_{48}r$，$\frac{1}{2}a_{96}r$，故得圆内接正 48、96、192 边形面积算法各为

$$S_{48}=24\left(\frac{1}{2}a_{24}\cdot r\right)=12\ a_{24}\cdot r,$$

$$S_{96}=48\left(\frac{1}{2}a_{48}\cdot r\right)=24\ a_{48}\cdot r,$$

$$S_{192}=96\left(\frac{1}{2}a_{96}\cdot r\right)=48\ a_{96}\cdot r.$$

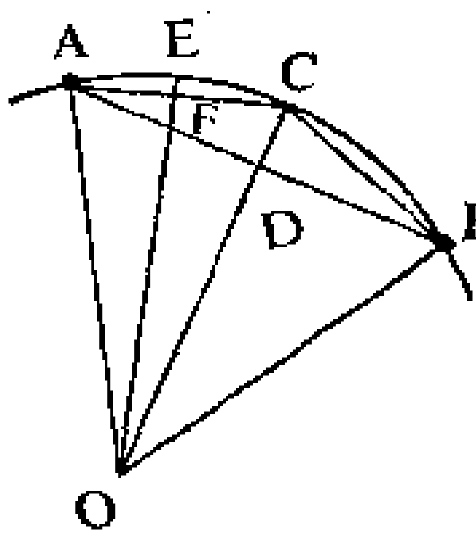


图 8

一般来说，设 $a_{3\cdot 2^{n-1}}$ 是圆内接正 $3\cdot 2^{n-1}$ 边形一边之长，r 是圆半径，由筝形面积算法，易于求得圆内接正 $3\cdot 2^n$ 边形的面积 $S_{3\cdot 2^n}$ 为：

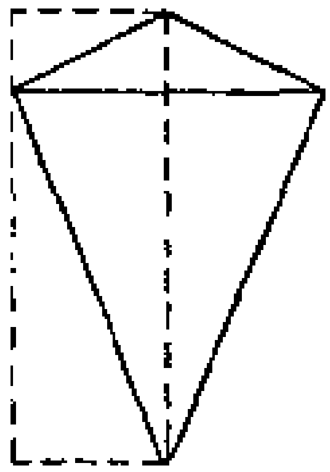


图 9

$$S_{3\cdot 2^n}=3\cdot 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\cdot a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r\right).$$

根据刘徽不等式

$$S_{3\cdot 2^n}<S<S_{3\cdot 2^n}+(S_{3\cdot 2^n}-S_{3\cdot 2^{n-1}})$$

可知，当 $n\to\infty$ 时，则有 $(S_{3\cdot 2^n}-S_{3\cdot 2^{n-1}})\to 0$，即得圆面积 S：

$$\begin{aligned}S&=\lim_{n\to\infty}[S_{3\cdot 2^n}+(S_{3\cdot 2^n}-S_{3\cdot 2^{n-1}})]\\&=\lim_{n\to\infty}S_{3\cdot 2^n}\\&=r\lim_{n\to\infty}\left(3\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}\right)=r\cdot\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}\right)=\frac{C}{2}$ 即是圆周之半。这就是刘徽用极限观念证明了圆面积的算法，即“半周为从，半径为广，故广从相乘为积步也。”

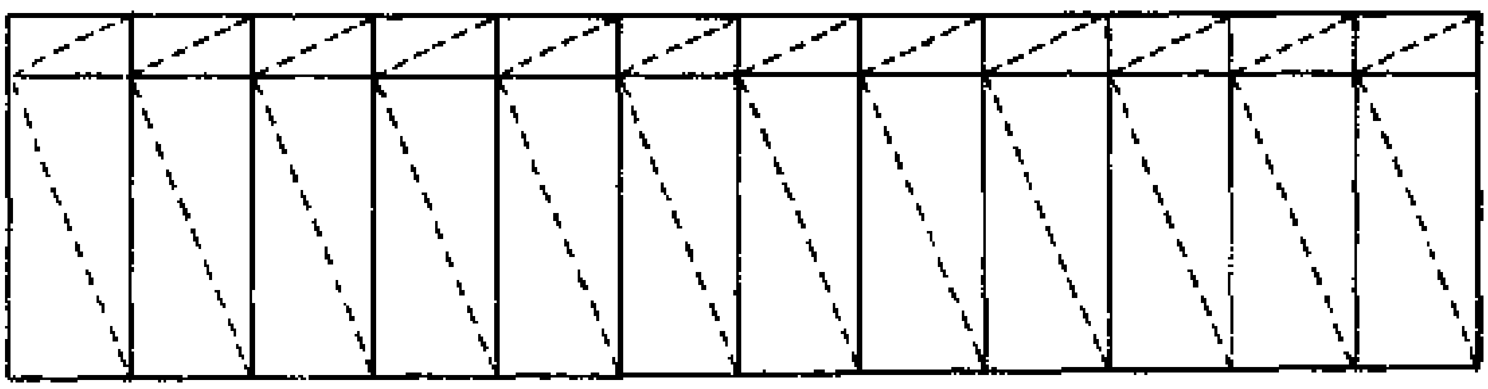


图 10

刘徽说：“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。”这就是刘徽用极限观念对上式的描述。如果这一段话是刘徽的“析理以辞”，那末他的“解体用图”可能是分别按正多边形的边和圆半径裁开来，把每一个筝形割补成一个

长方形，再把这些长方形拼成一个大长方形。当正多边形的边数倍增时，就得到一边等于半径，一边等于半圆周的长方形。即刘徽所说："以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍，故以半周乘半径而为圆幂"(图 9、10)

对于环田面积的算法，经文说："并中外周而半之，以径乘之为积步。"又一算法说："置中外周步数，分母子各居其下。母互乘子，分母相乘，通全步，内分子，并而半之。又可以中周减外周，余半之，以益中周。径亦通分内子，以乘周为实。分母相乘为法，除之为积步，余积步之分。以亩法除之，即亩数也。"刘徽注说"此田截齐中外之周为长。并而半之者，亦以盈补虚也。"又说："此可令中外周各自为圆田，以中圆减外圆，余则环实也。"还说："并而半之者，以盈补虚，得中平之周。周则为从，径则为广，故广从相乘而得其积。"

«九章算术»所载环田术是正确无误的，刘徽注文是给出这种算法的证明。由刘注可以看出，他是在圆面积算法的基础上，利用两圆面积差推证圆环面积算法的。即设外圆、内圆的圆周、直径、面积分别为C、c，D、d，S、s；圆环面积的推导步骤可能是：

$$S-s=\frac{\pi D^2}{4}-\frac{\pi d^2}{4}$$
$$=\frac{C+c}{2}\left(\frac{D}{2}-\frac{d}{2}\right).$$

即刘注所说"中圆减外圆，余则环实也。"这算法不止适用于圆环面积算法，也适用于环缺面积的计算。设环缺的内、外弧，内、外半径，内、外扇形面积分别为c、C，r、R，s、S；类似地可得环缺面积为：

$$S-s=\frac{C+c}{2}(R-r).$$

这就是环田术所说："并中外周而半之，以径乘之为积步。"

刘徽利用两圆(或扇形)之差论证圆环(或环缺)的面积算法时，可能把两圆的圆周(或扇形的弧)引成直线，使圆环(或环缺)变成与之等积的等腰梯形，进行验证(图 11、12)。商功章曲池术刘注说："此池环而不通匝，形如盘蛇而曲之。亦云周者，谓如委谷依垣之周耳。引而伸之，周为袤。求袤之意，环田也。"由

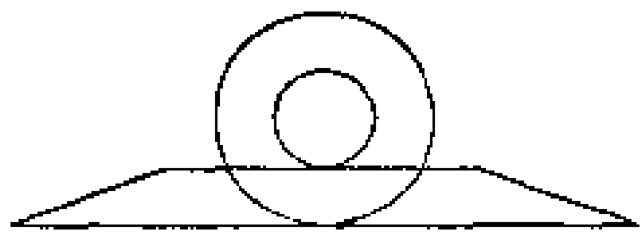


图 11

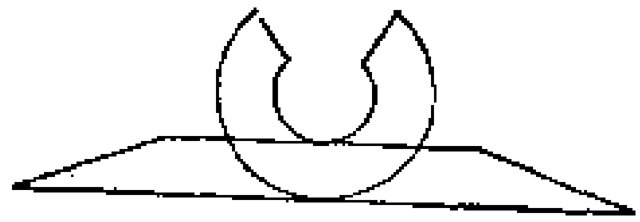


图 12

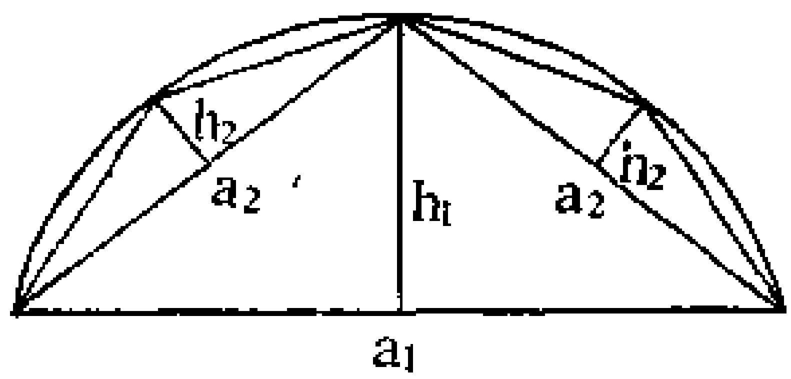


图 13

这段注文可以证明，刘徽是把圆环(或环缺)变成等积的等腰梯形进行验证的。

至于弓形面积算法，弧田术为："以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一。"刘徽认为不够精密，便创造了新的方法，用极限观念推求其面积。即：

设弓形的弦，矢分别为a_1，h_1，在弓形内作一内接等腰三角形，其面积为$\Delta_1=\frac{1}{2}a_1h_1$。再在以腰为弦的两个小弓形内，各作一个内接小等腰三角形，设小弓形的弦、矢分别为a_2，h_2，则

两个小等腰三角形的面积和为 $2\Delta_2=2\left(\frac{1}{2}a_2h_2\right)$。照这样继续分割下去，将所得各个三角形的面积加起来(图 13)，即得：

$$S_n=\Delta_1+2\Delta_2+4\Delta_3+\cdots+2^{n-1}\cdot\Delta_n$$
$$=\frac{1}{2}a_1h_1+2\left(\frac{1}{2}a_2h_2\right)+2^2\left(\frac{1}{2}a_3h_3\right)+\cdots+2^{n-1}\left(\frac{1}{2}a_nh_n\right).$$

即是刘注所说："割之又割，使之极细。但举弦矢相乘之数，则必近密率矣。"当分割次数 n 无限增大时，上式的极限就是弓形面积的确值。即：

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}a_1h_1+2\left(\frac{1}{2}a_2h_2\right)+\right.$$
$$\left.+2^2\left(\frac{1}{2}a_3h_3\right)+\cdots+2^{n-1}\left(\frac{1}{2}a_nh_n\right)\right].$$

这就是刘徽推求弓形面积的算法。

可以明显地看出《九章算术》与刘徽对于平面图形面积算法的推导情形：是以面积概念及长方形面积算法作为出发点，由长方形而等腰三角形，而直角梯形，而等腰梯形，而圆面积，然后圆环面积及弓形面积。对于这些图形的面积算法，都是直接或间接根据出入相补原理进行推导的；也就是利用以盈补虚的办法论证的。因为这是推证面积的算法，所以可以知道，"盈"与"虚"必须是面积相等的图形。

在这些面积算法的推导中，可以看出，刘徽不仅深知"盈"与"虚"是两个等积形，而且还知"盈"与"虚"是两个全等形。也就是说，刘徽必然知道两对对应边相等的句股形是全等句股形。也知道四对对应边相等的直角梯形是全等形。还知道等腰三角形、直角梯形、等腰梯形的中位线的性质。既知道等腰三角形底边的高平分其底，而且也知道筝形的对角线是相互垂直的。同时由割圆术及弧田术里也可看出，刘徽深知垂直于弦的半径，既平分其弦，也平分其所对应的弧。

刘徽在推证这些图形面积算法的同时，正确地证明了这些图形的面积算法，还深刻了解图形之间的一些性质。所可惜的是，这些性质不见于记载。

二　体积计算的理论

《九章算术》与刘徽把体积作为基本概念，以长方体的体积算法即其长、宽、高的乘积作为基本算法。并把"城"、"垣"、"堤"、"沟"、"堑"、"渠"、"方亭"、"圆亭"、"方锥"、"圆锥"、"方垛壔"、"圆垛壔"、"立圆"以及"委粟"等作为已知的名称，在《九章算术》里不必给以定义，但是对于作为三种基本的几何体的"堑堵"、"阳马"、"鳖臑"刘徽却给出了明确的界说。

刘徽推证直线型柱体体积时，也是利用出入相补原理的。对直线型非柱体的体积，是在论证了三种基本几何体的体积算法以后，把立体分割为三种基本几何体进行推证其体积算法。至于曲线型立体的体积算法，则是利用下面原理推证的：同高的两立体，在等高处各作一与底平行的截面，若截面面积之比为一常数，则此二立体体积之比也等于这一常数。

如城、垣、堤、沟、堑、渠术为"并上下广而半之，以高若深乘之，又以袤乘之，即积尺。"刘注说"损广益狭。""并上下广而半之者，以盈补虚，得中平之广。以高若深乘之，得一头之立幂。又以袤乘之者，得立实之积，故为积尺。"即是变城，垣、堤、沟、堑、渠之形为等积的长方体(图 14)。变形中，刘徽必然深刻了解底为全等句股形高相等的直棱柱是全等形。

为了推算直线型非柱体的体积算法，便先确定了堑堵、阳马及鳖臑三种基本几何体的体积算法，然后再把直线型非柱体分割成三种基本几何体，从而导出其体积算法。并把这三种基本几何体看作是直线型非柱体的基本元素。刘徽说："鳖臑之物，不同器用。阳马之形，或随修短广狭。然不有鳖臑，无以审阳马之

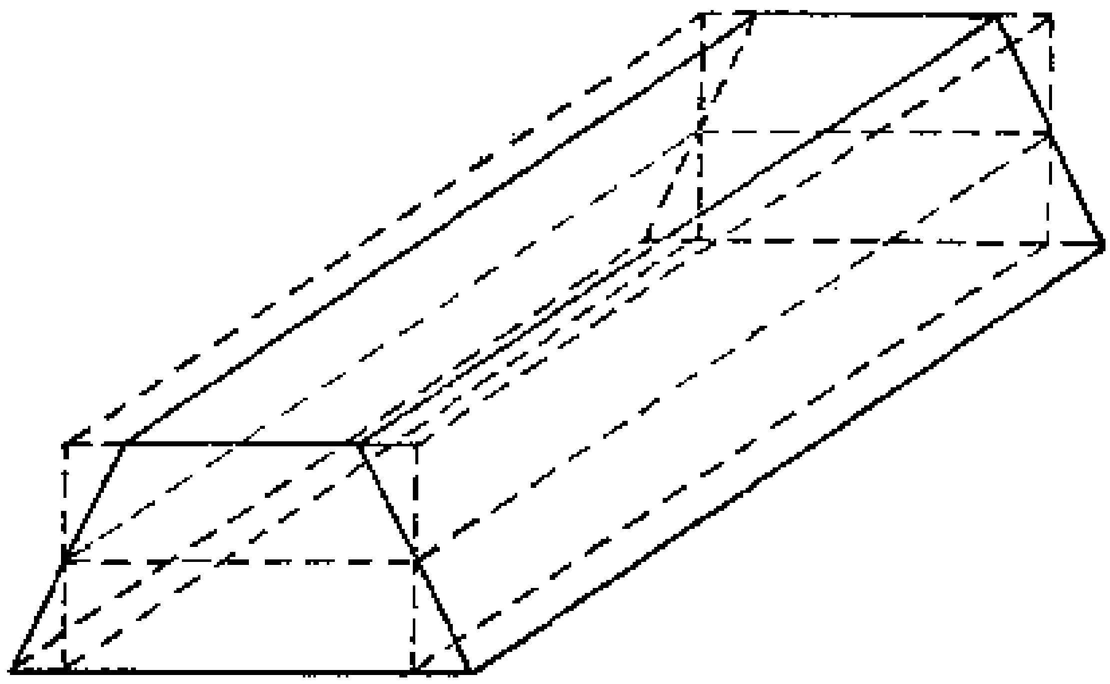


图 14

数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之主也。”

堑堵，就是底为句股形的直棱柱；阳马就是底为正方形或长方形、一侧棱与底垂直的四棱锥；鳖臑就是各面皆为句股形的四面体。刘徽说：“邪解立方得两堑堵。虽复椭方，亦为堑堵。”“邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。”所谓“邪解”，就是斜截面。前一“邪解”，是指过两条平行线所作的截面（图 15）；后一“邪解”，是指过三个顶点所作的截面（图 16）。由这两处“邪解”可知，对于确定一个平面的条件，刘徽是深知无疑的。

刘徽定义了堑堵、阳马、鳖臑之后，说：“合两鳖臑成一阳

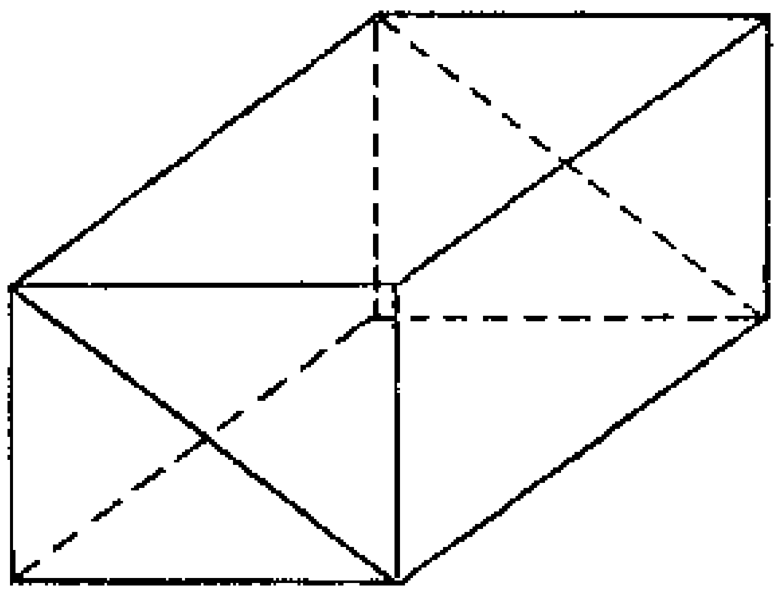


图 15

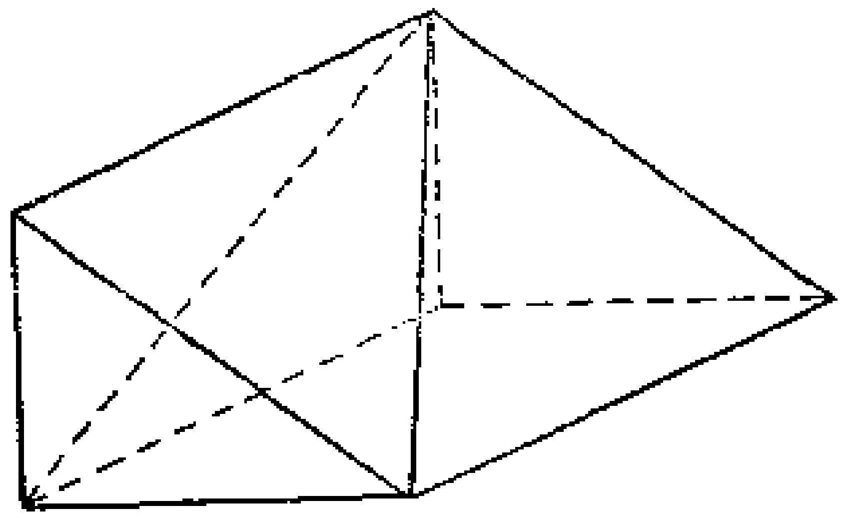


图 16

马，合三阳马而成一立方，故三而一。"又说："悉割阳马，凡为六鳖臑。观其割分，则体势互通，盖易了也。其棊或修短，或广狭，立方不等者，亦割分以为六鳖臑。其形不悉相似，然见数同，积实均也。"

刘徽既然知道"合两鳖臑成一阳马"、"合三阳马而成一立方"，他必然了解"合""成"阳马或立方的条件。因此可以断定刘徽了解句股形的全等条件，直线与平面垂直的性质，也了解两鳖臑、两阳马是对称形的条件。同时，也可以断定他知道底为全等句股形、高相等的棱锥是等积体。

如前所述，刘徽定义了三种基本几何体之后，便把方亭、方锥、羡除、刍甍、刍童等分割为三种基本几何体，以阐明其体积算法。例如把方亭分割为一立方、四阳马与四堑堵。并认为方亭上，下底边相乘与高的乘积是一立方与四堑堵的体积和，下底边平方与高的乘积是一立方、八堑堵、十二阳马的体积和，上底边平方与高的乘积是一立方的体积。以上共得三立方、十二堑堵、十二阳马体积之和，即是方亭体积三倍，故得方亭体积算法。

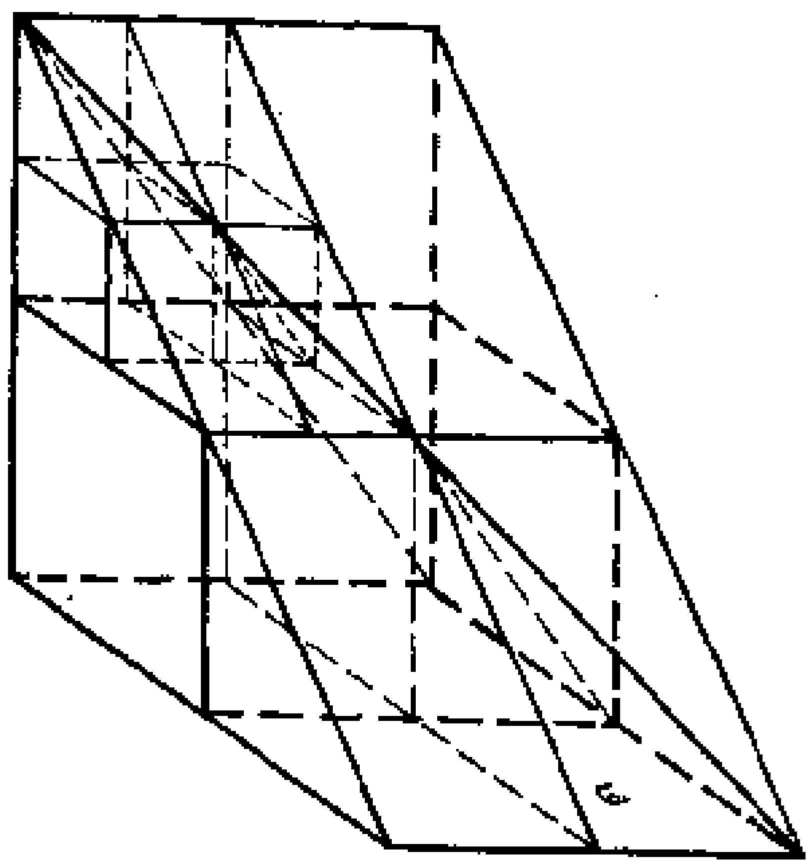
这种分割法，是我国的传统方法，也是«九章算术»特点之一。这种方法实用价值很大，直观性也强，流传很广。刘徽在论说直线型立体的体积算法时，多用这种方法。

另外，刘徽用分割法以极限观念论说了阳马与鳖臑体积之比

为 2:1。他虽然"验之以棊"，以三度相等的阳马与鳖臑推导，但他又说"方随棊改，而固有常然之势也。"就是说即使阳马与鳖臑的三度有所改变，但是它们的比仍为 2:1。他的论说方法并不失其一般性。取三度为 a、b、c 的堑堵，"邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。"然后过三度的中点，作平分截面，把鳖臑分成三度为$\frac{a}{2}$、$\frac{b}{2}$、$\frac{c}{2}$的两个小堑堵、两个小鳖臑；把阳马分成三度为$\frac{a}{2}$、$\frac{b}{2}$、$\frac{c}{2}$的一个小长方体、两个小堑堵，及两个小阳马(图 17)。

由鳖臑分割出来的两个小堑堵与由阳马分割出来的两个小堑堵，可合成三度为$\frac{a}{2}$、$\frac{b}{2}$、$\frac{c}{2}$的两个小长方体，连同由阳马分割出来的小长方体，共计三个小长方体。在这三个小长方体中，由鳖臑分割出来的与由阳马分割出来的体积之比显见为 1:2。

由鳖臑分割出来的三度为$\frac{a}{2}$、$\frac{b}{2}$、$\frac{c}{2}$的两个小鳖臑与由阳马分割出来的三度为$\frac{a}{2}$、$\frac{b}{2}$、$\frac{c}{2}$的两个小阳马，可以合成两个小堑堵。这两个小堑堵便可合成一个小长方体。在这四个小长方体中，已知三个小长方体里由鳖臑与阳马分割出来的体积之比为 1:2。还有一个小长方体里由鳖臑与阳马分割出来的体积之比不明确，所以刘徽说"四分之三又可知也。"


图 17

至于在小鳖臑与小阳马所合成的小堑堵中，由鳖臑和阳马分割出来的体积之比是不是 1:2，还需进行研究。于

是刘徽又过由这两个小鳖臑、两个小阳马所合成两个堑堵的三度中点，作平分截面。照这样无限分割下去，则可证得鳖臑与阳马体积之比为1:2。刘徽说："半之弥少，其余弥细。至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉。"

用式子表示如下：

[堑堵]=[阳马]+[鳖臑]

=([阳马的小长方体]+2[阳马的小堑堵]+2[阳马的小阳马])+(2[鳖臑的小堑堵]+2[鳖臑的小鳖臑])

$=\frac{abc}{2^3}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{abc}{2^3}+2($[小阳马的更小长方体]+2[小阳马的更小堑堵]+2[小阳马的更小阳马]$)+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{abc}{2^3}+2(2$[小鳖臑更小堑堵]+2[小鳖臑更小鳖臑])。

$=2\left(\frac{abc}{2^3}\right)+2^2\left(\frac{abc}{2^6}\right)+2^2$[小阳马的更小阳马]$+\left(\frac{abc}{2^3}\right)+2\left(\frac{abc}{2^6}\right)+2^2$[小鳖臑的更小鳖臑])

$$=abc\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{2n}}+\cdots\right)+abc\left(\frac{2}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots+\frac{1}{2^{2n+1}}+\cdots\right)$$

显然，当 $n\to\infty$ 时则有

$$[\text{堑堵}]=\lim_{n\to\infty}abc\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{2n}}+\cdots\right)+\lim_{n\to\infty}abc\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots+\frac{1}{2^{2n+1}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{abc}{3}+\frac{abc}{6}。$$

故知 $[\text{阳马}]:[\text{鳖臑}]=\frac{abc}{3}:\frac{abc}{6}=2:1$，

或 $[\text{鳖臑}]:[\text{阳马}]=\frac{abc}{6}:\frac{abc}{3}=1:2$。

这就是所谓"刘徽原理"："邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑，阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。""每二分鳖臑则一阳马也。"在理论上得到了证明。

在证明中，刘徽并不是用阳马、鳖臑的体积算法而是利用堑堵及长方体的体积推证的。可见，刘徽的证明是十分严密而且合于逻辑。

在推求体积算法时，除了使用割补法、分割法以外，对于曲线型立体，则多使用相比法。刘徽不仅在体积中使用了相比法，在面积推导中，也间或使用相比法。

例如刘徽说："按弧田图，令方中容圆，圆中容方，内方合外方之半。"他还说："假令方二尺，方四面并得八尺也，谓之方周。其中令圆径与方等，亦二尺也。圆半径以乘圆周之半，即圆幂也。半方以乘方周之半，即方幂也，然则方周者，方幂之率也，圆周者，圆幂之率也。"设$S_{圆}$、$S_{方}$、$C_{圆}$、$C_{方}$分别表示圆面积、外切正方形面积、圆周、外切正方形之周，则得

$$S_{圆}:S_{方}=C_{圆}:C_{方}=\pi:4。$$

又如，刘徽说："若令其（方锥）中容圆锥，圆锥见幂与方锥见幂，其率犹圆幂之与方幂也。"即：设$S_{圆锥}$为圆锥侧面积，$S_{方锥}$为圆锥外切方锥的侧面积，即有：

$$S_{圆锥}:S_{方锥}=S_{圆}:S_{方}=\pi:4$$

刘徽又说："从方亭求圆亭之积，亦犹方幂中求圆幂。""此圆亭四角圆杀，比于方亭，二百分之一百五十七。"即：设$V_{圆亭}$为圆亭体积，$V_{方亭}$为圆亭外切方亭的体积，即有：

$$V_{圆亭}=\frac{S_{圆}}{S_{方}}\cdot V_{方亭}=\frac{\pi}{4}\cdot V_{方亭},$$

或 $$V_{圆亭}:V_{方亭}=\pi:4。$$

刘徽还说："圆锥比于方锥，亦二百分之一百五十七。……，其说如圆亭也。"设 $V_{圆锥}$ 为圆锥体积，$V_{方锥}$ 为圆锥外切方锥体积，则有

$$V_{圆锥}:V_{方锥}=\pi:4。$$

对于圆锥与其外切方锥体积之比，刘徽还说："从方锥中求圆锥之积，亦犹方幂求圆幂，乃当三(π)乘之四而一，得圆锥之积。"即

$$V_{圆锥}=\frac{S_{圆}}{S_{方}}\cdot V_{方锥}=\frac{\pi}{4}\cdot V_{方锥}。$$

另外，刘徽在推求球体积时说："取立方棊八枚，皆令立方一寸，积之为立方二寸。规之为圆囷，径二寸，高二寸。又复横规之，则其形有似牟合方盖矣。八棊皆似阳马，圆然也。按合盖者，方率也。丸居其中，即圆率也。"即，设"牟合方盖"的体积为 $V_{牟}$，"牟合方盖"的内切球的体积为 $V_{球}$，按刘徽所说，则有，

$$V_{牟}:V_{球}=4:\pi，或 V_{球}:V_{牟}=\pi:4。$$

综上所述，可以看出，刘徽知道正方形周长及其面积的算法，也知道圆的周长及其面积的算法，所以很方便而且正确地导出正方形与其内切圆的周长之比以及两者面积之比。

但是当刘徽在证明宛田面积，圆亭体积，圆锥体积以及球的体积计算方法时，却得到了

$$S_{圆锥}:S_{方锥}=\pi:4,$$

$$V_{圆亭}:V_{方亭}=\pi:4,$$

$$V_{圆锥}:V_{方锥}=\pi:4,$$

以及 $$V_{球}:V_{牟}=\pi:4。$$

刘徽究竟是如何得到这些相比之值，确实是一个十分重要而又必须加以探讨的问题。

刘徽要证明宛田面积算法，圆亭体积算法，圆锥体积算法以

及球的体积算法，绝不会把《九章算术》所说算法分别与圆锥的外切方锥侧面积算法、圆亭的外切方亭体积算法、圆锥的外切方锥体积算法推得其比为 $\pi:4$。因为这样不但不符合逻辑推理，又失却证明的意义。据此，刘徽可能由别的方法推导出圆锥的侧面积，圆锥的体积，然后才求得上述之比。或者由别的方法求得圆锥与其外切方锥的侧面积之比、圆亭与其外切方锥的体积之比，圆锥与其外切方锥体积之比。

至于"牟合方盖"与其内切球的体积之比，刘徽既不知"牟合方盖"的体积算法，又不便使用《九章算术》的球体积算法，但他却知道这两者体积之比。因此，不能不使人相信刘徽必然由别的方法可以推算出这两者之间的正确无误的体积之比。

在《九章算术》的羡除术里，刘徽说："合四阳马以为方锥，邪画方锥之底，亦令为中方。就中方削而上合，全为方锥之半。于是阳马之棊悉中解矣。中锥离而为四鳖臑焉。故外锥亦为四鳖臑。虽背正异形，与常所谓鳖臑参不相似，实则同也。"其中所说中锥之鳖臑与外锥之鳖臑有相等的体积。这种说法，固然可以底面积相等、高相等来论述，但也可以用别的原理来论证。可是刘徽于后文则说："按阳马之棊两邪棊底方，当其方也，不问旁角而割之，相半可知也。推此上连无成不方，故方锥与阳马同实"。在这里，刘徽明确地指出：一方锥与一阳马，若其底、高分别相等，等高处的截面面积相等，则方锥与阳马等体积。据此，似可推断刘徽既然用这一原理论证方锥与阳马同实，很可能也用这一原理证明中锥鳖臑与外锥鳖臑等体积。

关于圆亭与其外切方亭体积之比、圆锥与其外切方锥体积之比的问题，一如前述。既然刘徽不可能用《九章算术》的算法推算其比值，可能使用下述原理进行推导，即：

同高的两立体，在等高处各作一与底平行的截面，若截面面积之比为一常数，则此二立体体积之比也等于这一常数。

由于刘徽十分清楚圆与其外切正方形面积之比为$\pi:4$，又知圆亭与其外切方亭、圆锥与其外切方锥在等高处的截面图形就是圆与外切正方形，所以易于得到圆亭与其外切方亭、圆锥与其外切方锥体积之比为$\pi:4$。又因刘徽深知圆与其外切正方形的周长之比为$\pi:4$，据此则知圆锥与其外切方锥的侧面积之比为$\pi:4$。

据上所述，不难发现刘徽是如何导出"牟合方盖"与其内切球的体积之比。

我们认为：因"牟合方盖"的截面是一正方形，而与球的截面则是该正方形的内切圆。由于正方形与其内切圆面积之比为$4:\pi$，则知"牟合方盖"与其内切球的体积之比也是$4:\pi$。

即 $V_{牟}:V_{球}=4:\pi$，或 $V_{球}:V_{牟}=\pi:4$。

如果再使用一次上述原理，即可求得球的体积算法，但刘徽十分谨慎，唯恐有所差错，便说"敢不阙疑，以待能言者。"

后来，祖暅求得了球的体积算法。根据李淳风的注文，祖暅取"牟合方盖"的八分之一，称为内棊(图 18)。设圆柱半径为R，于高为h处作内棊的截面，则截面一边为$\sqrt{R^2-h^2}$，截面面积为(R^2-h^2)。因而可知于高为h处外三棊的截面面积应为h^2。作一个各棱都为R的倒立的阳马，于高为h处倒立阳马的截面面积也等于h^2，于是外三棊与倒立阳马等体积，都等于$\frac{1}{3}R^3$，内棊则为$\frac{2}{3}R^3$，故知"牟合方盖"等于其外切正方体体积的$\frac{2}{3}$。又因"牟合方盖"与其内切球体之比为$4:\pi$，即得

$$V_{球}=\frac{16R^3}{3}:4=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

可是，李淳风却说"刘徽循故，未暇新校。夫岂难哉，抑未之思也。"

李之所说，确实不够谦虚。因为祖暅既使用了刘徽所创造的

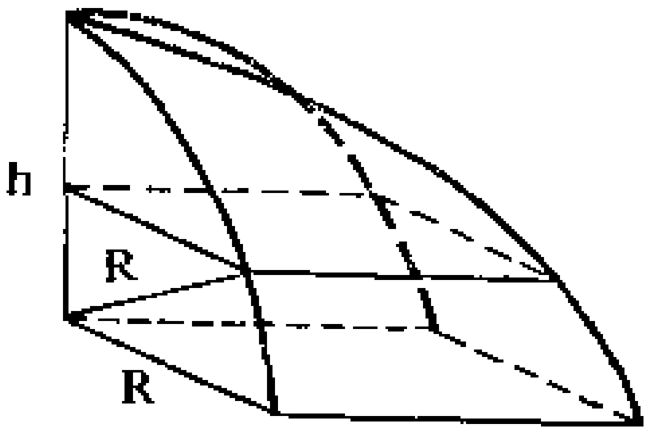


图 18

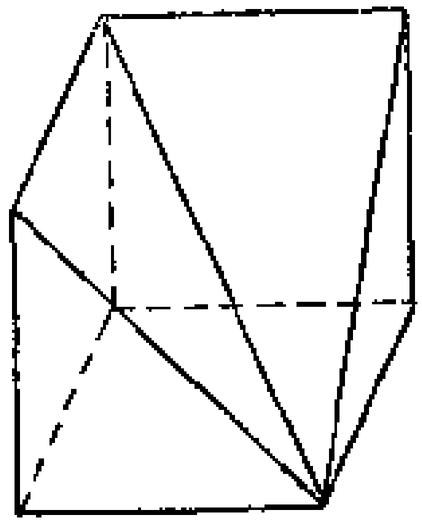


图 19

牟合方盖”，又使用了刘徽所提出的“牟合方盖”与其内切球体积之比，还使用了刘徽早已发现的上述原理。因此，不能说刘徽循故，也不应说刘徽未暇新校，还不能说刘徽未之思。李淳风的评论是不公平的，因而给后世带来许多误解。

另一方面，刘徽既发现了而且又多次使用了上述原理，只不过由于谦逊而未曾付诸笔墨。但是祖暅既使用了刘徽的其他成果，又使用了刘徽所创造的原理的特殊情形，只不过他明确为“缘幂势既同，则积不容异”一语，如果把这原理的发明权冠诸祖暅一人，使其一人独享专利权是不够公平的。因此，我们认为应该称此原理为“刘、祖原理”。

祖暅在证明时，先证明了外三綦的体积等于倒立阳马的体积，再证明内綦体积等于其立方体积的$\frac{2}{3}$，然后证明出球的体积算法。共有三个步骤。如果先证明内綦体积等于两个阳马合成体(即一个立方挖去一个阳马)(图 19)的体积，再证明球体积算法，则只有两个证明步骤。可以看出，祖綦虽非未之思，却是思之不深。

据此，不仅看出刘徽使用三种方法——割补法、分割法、相比法——正确无误地推证各种立体的体积算法，也可以看出刘徽

了解直线、平面与立体之间的某些几何关系，所可惜的是，这些关系却不见诸记载。

三　相似句股形及句股弦关系

《九章算术》及刘徽把相似句股形的概念作为基本概念，把相似句股形的性质作为基本性质。通过相似句股形的性质把一些几何问题转化为代数问题，并与体积或面积联系在一起，推导出一系列计算公式，从而形成我国几何学的特色之一。

在《九章算术》的许多地方都记载了相似句股形的性质，并用这些性质解决了有关的问题。即：

句率:见句＝股率:见股＝弦率:见弦，

或　　句率:股率:弦率＝见句:见股:见弦，

及　句率:股率＝见句:见股＝(句率－见句):(股率－见股)。

如句股容方术注说："幂图方在句中，则方之两廉各自成小句股，而其相与之势不失本率也。"句股容圆术注说："又画中弦以观其会，则句股之面中央各有小句股弦。句面之小股，股面之小句，皆小方之面，皆圆径之半。其数故可衰"(图 20、21)。

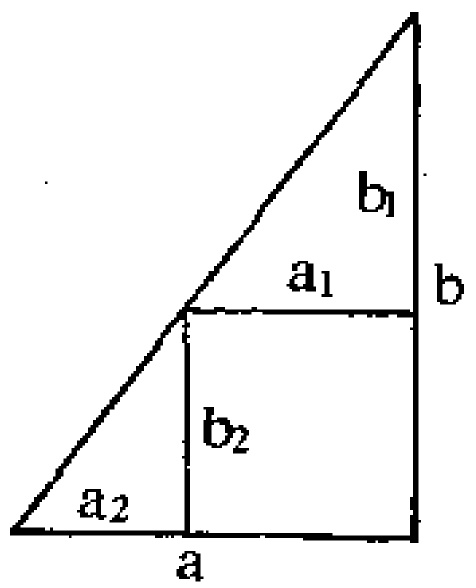


图 20

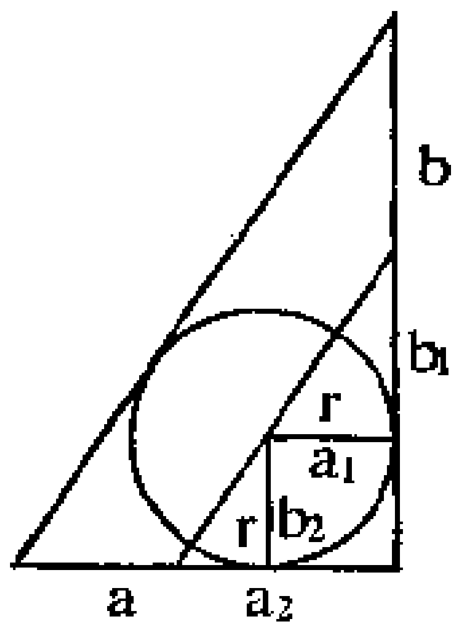


图 21

即　　$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a}{b},$$

及 $$a:b=r:b=a_1:r。$$

通过刘注不难发现，他不仅以相似句股形性质论证了“句股容方”、“句股容圆”的计算公式，而且还十分了解句股形的相似条件。由“句股容方”可知，刘徽可能了解两句股形中若共锐角，则两句股形相似；若两句股形都与第三句股形相似，则这两句股形必相似。通过“句股容圆”来看，虽然不便说刘徽了解平行线同位角必相等的性质，但总可以说他了解与斜边平行的直线所截得的句股形与原句股形相似。

刘徽在«九章算术»序言里说：“立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景。以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高，即日去地也。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也”(图 22)。

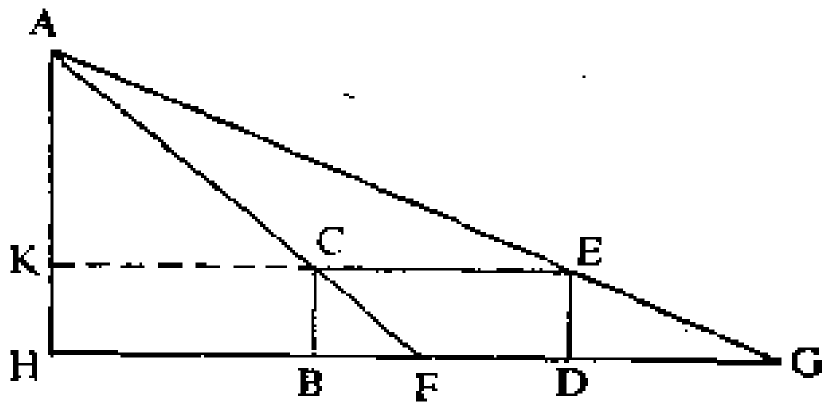


图 22

这就是刘徽记载了用表或矩“重”复两次，并以两个测得的数据之“差”进行计算的方法，即是“重差术”。也就是：

$$日去地=\frac{表间\times 表高}{表影之差}+表高,$$

$$南戴日下=\frac{表间\times 南表影}{表影之差}。$$

这就是“重差术”的计算公式。这公式形成很早，根据刘徽说“按«九章»立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差

之名，原其指趣乃所以施此也。”又说：“凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差，句股则必以重差为率，故曰重差也。”我们以为“重差术”是根据相似句股形的性质推导出来的。

因 $\triangle AKC\sim\triangle CBF$，$\triangle AKE\sim\triangle EDG$，

故得 $$\frac{AK}{CB}=\frac{KC}{BF},\quad \frac{AK}{ED}=\frac{KE}{DG},$$

于是有 $$\frac{AK}{CB}=\frac{AK}{ED}=\frac{KE}{DG}=\frac{KC}{BF},$$

或 $$\frac{AK}{CB}=\frac{KE-KC}{DG-BF},$$

因而 $$AK=\frac{(KE-KC)\cdot CB}{DG-BF},$$

得“日去地”为

$$AH=AK+CB=\frac{(KE-KC)}{DG-BF}\cdot CB+CB。$$

其中$(KE-KC)$即是“表间”，$(DG-BF)$即是两表的“表影之差”。又因$\triangle AKC\sim\triangle CBF$，故得

$$\frac{AK}{CB}=\frac{KC}{BF},$$

则有 $$KC=\frac{AK\cdot BF}{CB}=\frac{(KE-KC)}{(DG-BF)}\cdot BF。$$

其中$(KE-KC)$是“表间”，$(DG-BF)$是“表影之差”。

很显然，我国古代的“重差术”是由相似句股形的性质推导出来的。

《九章算术》及刘徽不仅多次使用了相似句股形的概念及其性质，而且也多次使用了全等句股形的概念及其性质。如前所述，在某些图形使用的割补法中，以盈补虚的“盈”和“虚”必须是全等形或全等句股形。如果“盈”和“虚”不是全等句股形或全等形，则无法相补。

刘徽在论证句股定理时说："句自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也，合成弦方之幂。"由于刘徽的原图早已亡佚，今按李潢所补的图（图 23）说明如下：

将朱出、青出分别补入朱入、青入部分，连同原有的朱、青部分，正好合成以弦为边的正方形。这就是刘徽用割补法证明了的句股定理。

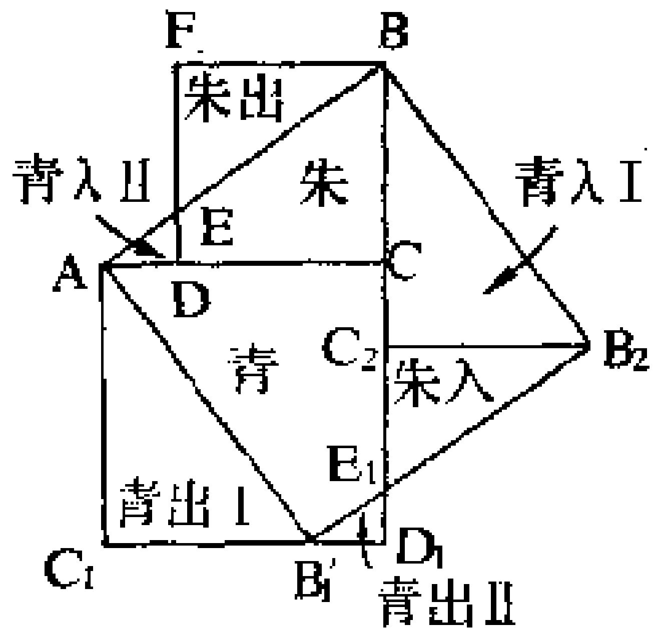


图 23

如果李潢所补的图附合刘徽原意的话，则刘徽必然了解：

$$\Delta ABC \cong \Delta AB_1C_1 \cong \Delta BB_2C_2,$$

$$\Delta BEF \cong \Delta B_2E_1C_2,$$

$$\Delta B_1E_1D_1 \cong \Delta AED。$$

也就是说，刘徽对相似句股形、全等句股形的条件及其性质必然深刻了解的。

在句股定理的基础上，刘徽根据面积概念几何地论证了下面的公式：

1．$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$；

2．$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$；

即"句股幂合为弦幂，明矣。然二幂之数谓倒在于弦幂之中，而可更相表里。居里者成方幂，其居表者则成矩幂。二幂表里形诡而数均。又按此图句幂之矩，朱卷居表，是其幂以股弦差为广，股弦并为袤，而股幂方其里。股幂之矩青卷居表，是其幂以句弦差为广，句弦并为袤，而句幂方其里"。又说"差之与并用除之"。即得

3．$\dfrac{a^2}{c-b}=c+b$，$\dfrac{a^2}{c+b}=c-b$；

4. $\frac{b^2}{c-a}=c+a$； $\frac{b^2}{c+a}=c-a$；

由3、4式分别相加减则得：

5. $c=\frac{1}{2}\left[(c-b)+\frac{a^2}{(c-b)}\right]$， $b=\frac{1}{2}\left[(c+b)-\frac{a^2}{(c+b)}\right]$；

6. $c=\frac{1}{2}\left[(c-a)+\frac{b^2}{(c-a)}\right]$， $a=\frac{1}{2}\left[(c+a)-\frac{b^2}{(c+a)}\right]$。

刘徽又利用大方（即以句股和为边的正方形）的面积几何地证明出

$$\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}=\frac{a+b}{2},$$

从而得到

$$a=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}-\frac{b-a}{2},\quad b=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}+\frac{(b-a)}{2}。$$

刘徽还说"又按此图幂，句股并自乘，加差幂为两弦幂。半之，开方得弦"。即

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2+(b-a)^2}{2}}=c。$$

由此可得：

$$a=\frac{\sqrt{2c^2-(b-a)^2}-(b-a)}{2},\quad b=\frac{\sqrt{2c^2-(b-a)^2}+(b-a)}{2}。$$

又可得

$$\frac{(a+b)+\sqrt{2c^2-(a+b)^2}}{2}=b,$$

$$\frac{(a+b)-\sqrt{2c^2-(a+b)^2}}{2}=a。$$

即是刘徽所说"倍弦幂减差幂，求句股并。盖先见其弦，然后知其句与股也。""句股合而自乘之幂，令弦自乘倍之为两弦幂以减之，其余，开方除之，为句股差。加差于合而半之为股。减差于合而半之为句"。

刘徽又利用句股二幂合为弦幂以及"矩于表"、"方于里"的关系几何地导出：

$$2(c-a)(c-b)=(a+b-c)^2$$

以及

$$\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)=a,$$

$$\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)=b,$$

$$\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)+(c-a)=c。$$

另一方面，刘徽还几何地导出

$$\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+(c+a)\right]=c,\quad \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+(c+a)\right]-\frac{b^2}{c+a}=a。$$

于是得句股弦之比为：

$$a:b:c=\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+(c+a)\right]-\frac{b^2}{c+a}\right\}:b:\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+(c+a)\right]\right\}$$

$$=\left[(c+a)^2-\frac{b^2+(c+a)^2}{2}\right]:b(c+a):\left[\frac{b^2+(c+a)^2}{2}\right]。$$

总上所述，可以看出《九章算术》的几何部分，是以面积、体积、句股相似为基本概念，长方形面积算法、长方体体积算法，相似句股形的性质为出发点，以割补法、分割法、相比法以及极限观念为手段，统帅了我国古代几何学的全部内容。它的理论结构是别有情趣的，而不同于西方的欧氏几何学。

参 考 文 献

[1] 钱宝琮校点：《算经十书》，中华书局，1963。

[2] 吴文俊：《出入相补原理》，《中国古代科技成就》，中国青年出版社，1978。
[3] 李迪：《中国古代数学家对面积的研究》，《数学通报》，1956，7。
[4] 杜石然：《祖暅公理》，《数学通报》，1954，3。
[5] 白尚恕：《九章算术校证》，本书。
[6] 白尚恕：《我国古代数学名著〈九章算术〉及其注释者刘徽》，《数学通报》，1980，6。
[7] 川原秀城：《刘徽注九章算术》，《中国天文学·数学集》，朝日出版社，1980。
[8] 三上义夫：《关孝和の業绩と京坂の算家并た支那の算法との关系および比较》，《东洋学报》，卷20、21、22，1932-35。
[9] D. B. Wagner, An Early Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid: Liu Hwi, Third century A. D., Historia Mathematica, 1979, 6.

《海岛算经》古证探源

吴 文 俊

刘徽《海岛算经》是一部关于测高望远之术的专著。按刘徽自序，有"析理以辞，解体用图"，以及"辄造重差，并为注解"等语，说明原著应有注有图。传至后世，所载九题祇有方法结果而无注析附图，杨辉在《算法通变本末》卷上中曾说，"海岛算法，隐奥莫得其秘，"清代李潢、沈钦裴等都曾尝试补出证明，但与刘徽原意显无共同之处。我们认为，要使古证复原，应该遵循以下三项原则，是否有当，还请有志者共同商讨。

原则之一，证明应符合当时与本地区数学发展的实际情况，而不能套用现代的或其他地区的数学成果与方法。

原则之二，证明应有史实史料上的依据，不能凭空臆造。

原则之三，证明应自然地导致所求证的结果或公式，而不应为了达到予知结果以致出现不合情理的人为雕琢痕迹。

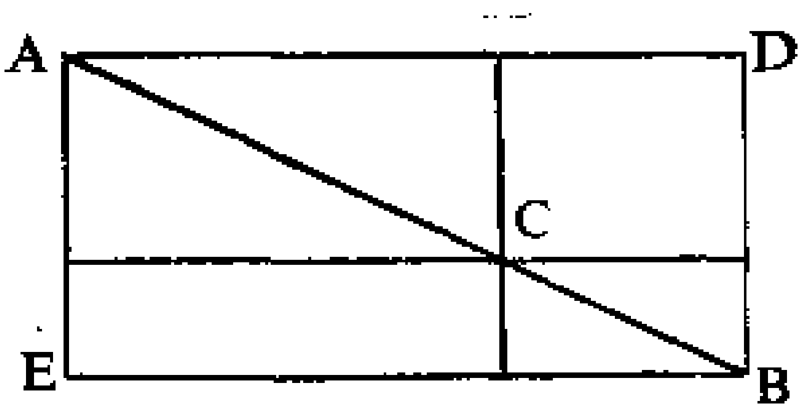
《海岛算经》的第一题海岛公式从明清以迄近代出现过不少证明，是否合于古证原意，可以依据这些原则逐一考核，中外经典著作，流传至今，历代难免有后人随意篡改增添，甚至伪造伪托，以至真假不辨，也可以依据这些原则作为鉴别真伪的一种手段。

本文将依据这些原则，尝试将《海岛算经》九题的古证补出于下。中国古代的几何学有其自己的发展过程与方法体系，与希腊欧几里得几何迥乎不同。在我国古代几何中，并未见到明显的平行线概念，角度也很少用，虽有比例理论，但文献所载局限于句股相似形的简单比例关系，而几未见到有关一般相似形以及各种

比例式的变形转化等记载，在古证复原中，这些概念都应避免使用，像李潢[9]那样滥添平行线的作法，更难允许。

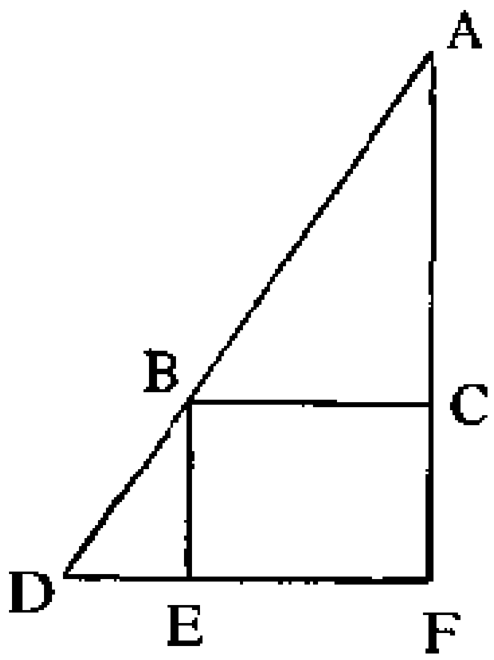
相反，出入相补，各从其类的原理，明显见诸九章刘徽注以及赵爽著作，在《九章算术》的商功句股诸章曾多方面应用，由此原理可得下二推论：

推论之一 如图从□AB与对角线AB上一点C可得□CD＝□CE（＝指面积相等）。



推论之二 如图在句股相似形ADF、ABC与BDE中，称AC＝见股，BC＝见句，BE＝股率，BE＝句率，AF＝大股，DF＝大句（或大股之句）则有

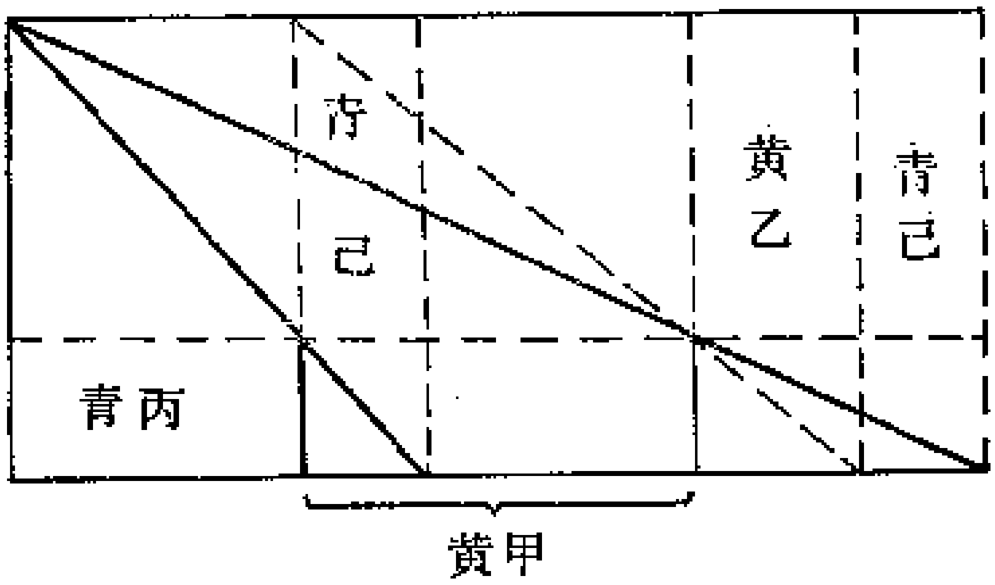
$$\frac{\text{大股}}{\text{大句}}=\frac{\text{见股}}{\text{见句}}=\frac{\text{股率}}{\text{句率}}。$$



这两推论显然是等价的，都曾多次应用于各种句股问题，详见刘徽九章注以及赵爽日高图说与句股圆方图说。

本文关于《海岛》九题的复原古证，无非是这两推论的反复运用。九题中海岛第一题中的岛高公式，望松第二题的松高辅助公式（见下）、以及望谷第四题的谷深公式，代表了古代用矩立表以望高、知远、测深的三个基本结果，其余诸题的公式皆可从这三个基本公式容易得出。在这三个基本公式特别是岛高公式的证明中，我们都祇用了推论之一的矩形等积关系而避免应用推论之二的句股相似形比例关系。其理由可概述如下：

1．这一证明及其附图(见下)，有赵爽的《日高图说》以及流传至今的日高残图作为依据。所谓“上与日齐”，即说明原图应补成若干长方形。从《日高图说》，可以推想古日高图(如下)与古证应较本文所示稍复杂一些，详见吴文俊[14]。



古日高图

2．杨辉在《续古摘奇算法》中自言“辉尝置海岛小图于座右，乃见先贤作法之万一”。可知杨辉是依据当时仍在流传的古海岛图来论证的。本文所附海岛图、相当于杨辉的隔水量竿的附图，证明也实质上即杨辉的证明或古时的海岛原证。

3．李潢在《重差图序》中说“望海岛旧有图解”，又说“旧图于形外别作同积二方”。这说明李潢时还能见到海岛古图，(依李序即古重差图)而从“同积二方”一语看来，这古图中是有许多长方形从形外别作而来的。

4．证明中我们避免应用推论之二，因为从比例关系还须经过某些运算变化才能得出最后公式，而这种运算变化在我国古代文献中颇少依据，三上义夫在所著论《海岛算经》的一章中(见[18]，页33～36)，曾经依据比例及其算法认为我国天元术代数学的产生，可从13世纪提前一千年至刘徽时期，这种过誉溢美之辞，我们认为是不应接受的。

5. 我们的证明衹需极简单的论证，从最基本的一些关系自然地直接获得刘徽原著所列举的那些形式上颇为复杂的公式。这足为这些证明基本上符合刘徽原意的一个旁证，与之相反，在利玛窦口译，徐光启笔受的《测量法义》中，以表测高的第10题实质上与海岛题相同，其证明颇有事先已知海岛公式而强欲用《几何原本》生搬硬套来获证，因而不无穿凿调琢之嫌。由于《测量法义》一书不易见到，故将利玛窦的原图原证作为本文附录原样照录，以供有心人的参考。

以下将就《海岛算经》九题逐一证明。为了便利读者，原题以及术曰将依古原著照录，而在括号中注明附图相应的点或线段，诸公式即是原来术文的直接转述。

望海岛第一

【一】望海岛：

今有望海岛(AB)，立两表(DE，FG)齐高三丈，前后相去(EG)千步，令后表与前表参相直。从前表(DE)却行(EH)一百二十三步，人目著地(H)取望岛峰(A)，与表末(D)参合。从后表(FG)却行(GI)一百二十七步，人目著地(I)取望岛峰(A)，亦与表末(F)参合。问岛高(AB)及去表(BE)各几何？

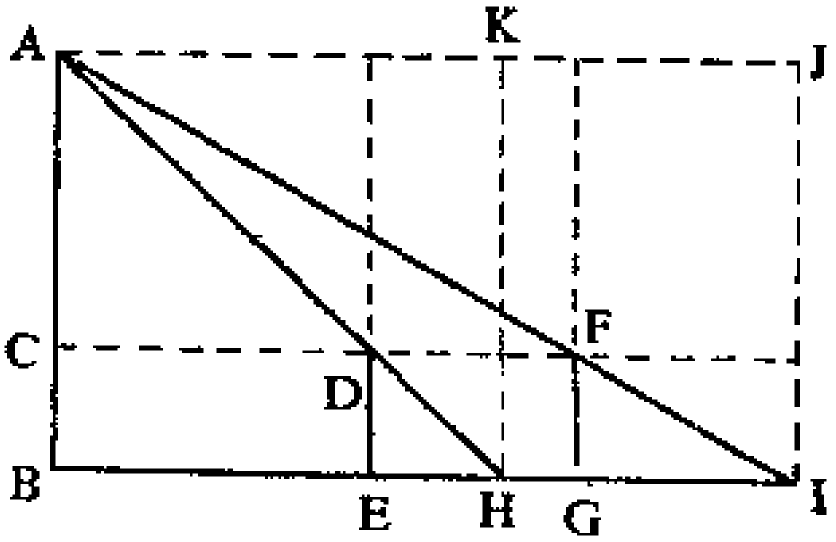
术曰：

以表高乘表间(EG)为实，相多($GI-EH$)为法，除之。所得加表高，即得岛高。求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实，相多为法，除之，得岛去表里数。

望海岛公式：

$$岛高=\frac{表间\times表高}{相多}+表高,$$

$$(前)表去岛=\frac{表间\times前表却行}{相多}.$$



海岛图

证　如附图，从□AI与F得

$$□FJ=□FB,$$

又从□AH与D得

$$□DK=□DB.$$

相减得　$$□FJ-□DK=□EF.$$

或：

后表却行×(岛高-表高)-前表却行×(岛高-表高)

=表间×表高，

由此即得岛高公式。

又从□DB=□DK得

前表去岛×表高=前表却行×(岛高-表高)；

应用岛高公式即得表去岛公式。

望 松 第 二

【二】望松：

今有望松(AB)生山(BC)上，不知高下。立两表(DE、FG)，齐高二丈，前后相去(EG)五十步，令后表(FG)与前表(DE)参相直。从前表却行(EH)七步四尺，薄地(H)遥望松末(A)，与表端(D)参合。又望松本(B)，入表(DJ)二尺八寸。复从后表却行(GI)八步五尺，薄地遥望松末(A)，亦与表端(F)

参合。问松高(AB)及山去表(CE)各几何?

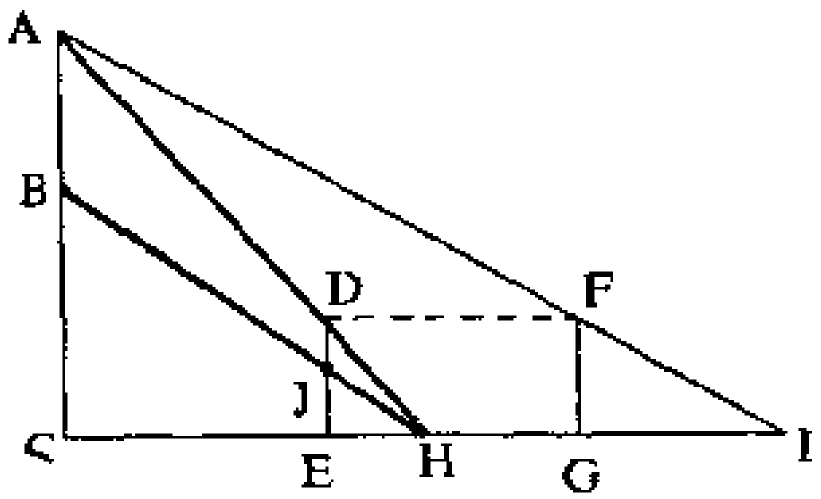
术曰:

以入表乘表间(EG)为实,相多($GI-EH$)为法,除之。加入表,即得松高。求表去山远近(CE)者,置表间,以前表却行乘之为实,相多为法,除之,得山去表。

望松公式:

$$松高=\frac{表间\times入表}{相多}+入表,$$

$$表去山=\frac{表间\times前表却行}{相多}.$$



松高图

证 先将附图与海岛图相比较,视 AC 为海岛,则表去岛即此处之表去山 CE,故由海岛公式得

$$表去山=\frac{表间\times前表却行}{相多}.$$

其次将前表两测从松高图中割裂而作松高辅助图,则从□AH与D得

$$□DK=□DC$$

又从□BH与J得

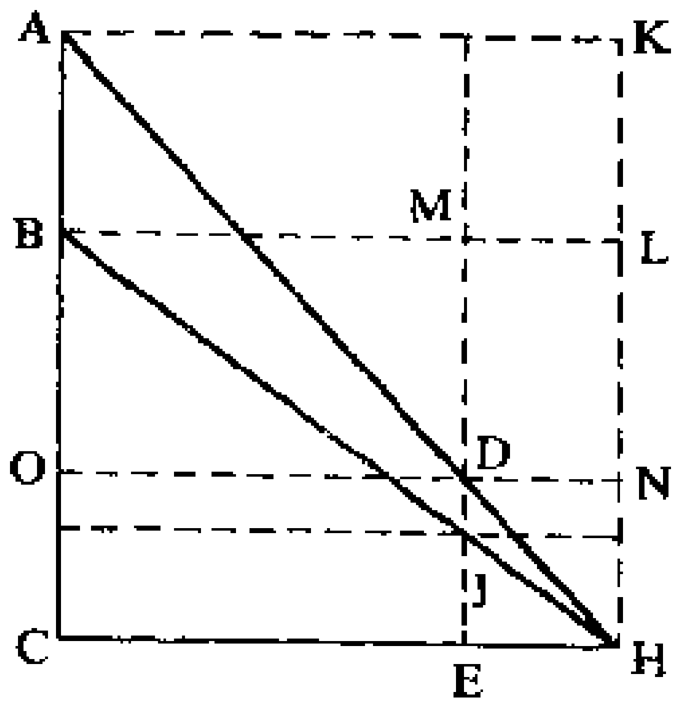
$$□JL=□JC$$

两式相减得

$$□MK-□JN=□JO$$

或即

前表却行×松高−前表却行×入表=表去山×入表。



松高辅助图

由此得

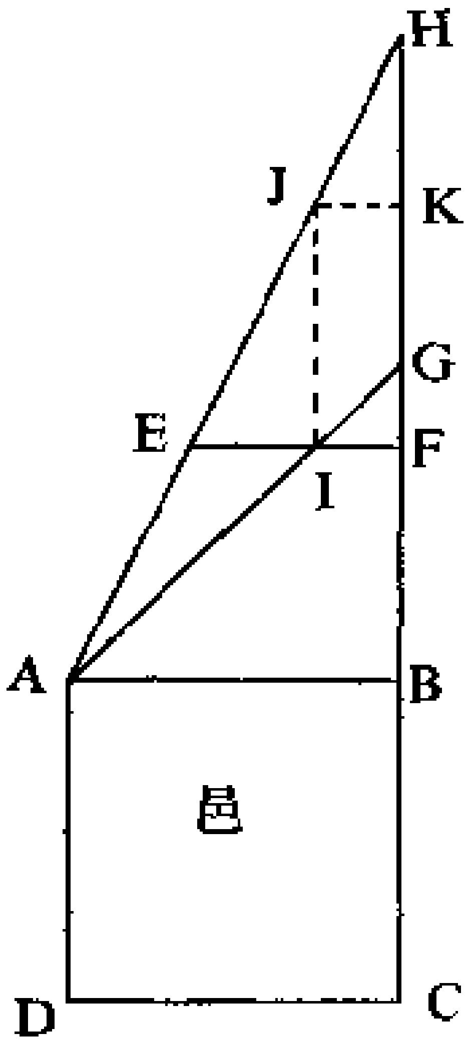
$$松高=\frac{表去山\times人表}{前表却行}+人表$$

这一公式在以后经常用到将称之为**松高辅助公式**。以表去山公式代入这一辅助公式，即得所求松高公式。

望 邑 第 三

[三] 望邑：

今有南望方邑($ABCD$)，不知大小。立两表(E,F)东西相去(EF)六丈，齐人目，以索连之。令东表(F)与邑东南隅(C)及东北隅(B)参相直。当东表之北却行(FG)五步，遥望邑西北隅(A)，入索东端(IF)二丈二尺六寸半。又却北行去表(FH)十三步二尺，遥望邑西北隅(A)适与西表(E)相参合。问邑方(AB)及邑去表(BF)各几何？



望邑图

术曰：

以入索乘后去表，以两表相去除之，所得为景差。以前去表减之不尽，以为法。置后去表，以前去表减之，余以乘入索为实，实如法而一，得邑方。

求去表远近者，置后去表，以景差减之，余以乘前去表为实。实如法而一，得邑去表。

望邑公式：

$$景差=\frac{入索\times后去表}{表相去},$$

$$邑方=\frac{入索\times(后去表-前去表)}{景差-前去表},$$

$$邑去表=\frac{前去表\times(后去表-景差)}{景差-前去表}.$$

证 添作 IJ 与 JK 如附图。从句股相似形 JKH 与 HEF 得

$$HK=\frac{JK\times FH}{EF}=\frac{IF\times FH}{EF}$$

$$=\frac{\text{入索}\times\text{后去表}}{\text{表相去}}$$

称 HK 为景差，即得所求景差公式。

今将附图与望海岛图比较，视 AB 为海岛，IF，JK 为前后两表，则两图间的关系对照如下表所示：

	望　　邑	望　海　岛
AB	邑方	岛高
IF	入索	表高
FK=FH−KH	后去表－景差	表间
BF	邑去表	（前）表去岛
FG	前去表	前表却行
KH	景差	后表却行
GH=FH−FG =FK+(KH−FG)	景差－前去表	相多
KH−FG	后去表－前去表	表间＋相多

依据这一对照表，岛高与表去岛公式，即各变为邑方与邑去表公式。

望谷第四

［四］望谷：

今有望深谷(EFG)，偃矩(BAC)岸上，令句(BA)高六尺。

从句端(B)望谷底(G)入下股(AD)九尺一寸。又设重矩($B'A'C'$)于上，其矩间(AA')相去三丈。更从句端(B')望谷底(G)，入上股($A'D'$)八尺五寸。问谷深(AE)几何?

术曰：

置矩间，以上股乘之，为实。上、下股相减，余为法，除之。所得以句高减之，即得谷深。

望谷公式：

$$谷深=\frac{矩间\times上股}{下股-上股}-句高.$$

证 从□$B'G$ 与 D'得：

□$D'H'$ = □$D'E$

从□BG 与 D 得：

□DH = □DE

相减得 □$D'I$ = □$D'A$ − □DF.

因 □$D'I$ = □$A'I$ − □$B'D'$

= □BD − □$B'D'$

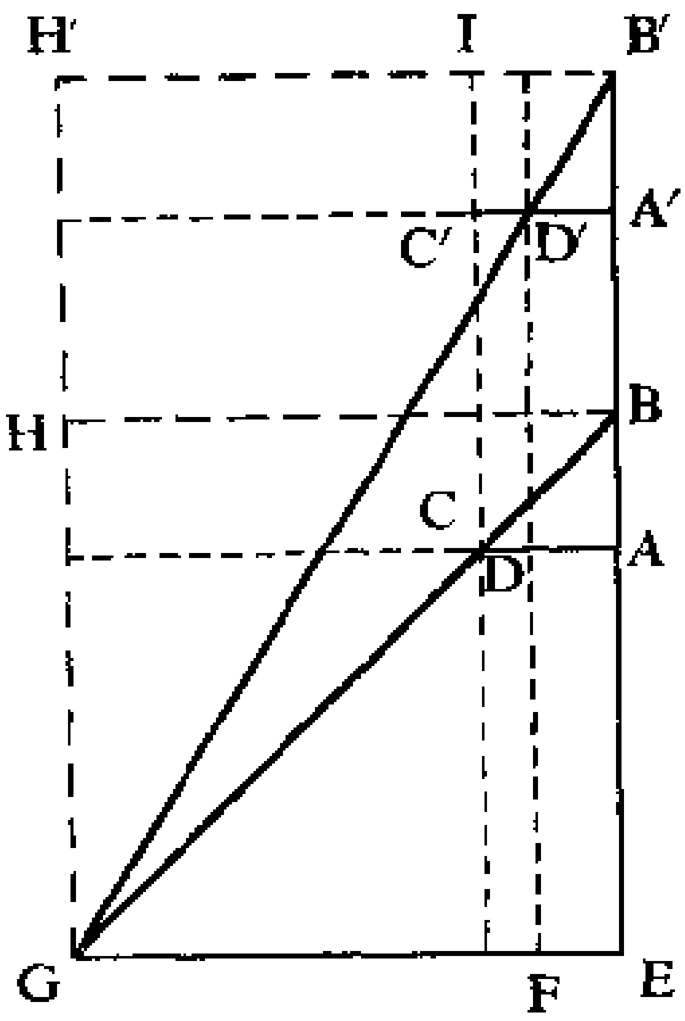
= 句高 × (下股 − 上股),

□$D'A$ = 矩间 × 上股,

□DF = □DE − □AF

= 谷深 × (下股 − 上股),

故得 谷深 × (下股 − 上股) = 矩间 × 上股 − 句高 × (下股 − 上股)。由此得望谷公式。



望谷图

望楼第五

[五] 望楼：

今有登山(AI)望楼(HG)，楼在平地。假矩(BAC)山上，令句(BA)高六尺，从句端(B)斜望楼足(G)，入下股(AD)一

丈二尺。又设重矩($B'A'C'$)于上，令其间相去($A'A$)三丈。更从句端(B')斜望楼足(G)，入上股($A'D'$)一丈一尺四寸。又立小表($E'D'$)于入股之会(D')，复从句端(B')斜望楼岑端(H)，入小表($F'D'$)八寸。问楼高(HG)几何?

术曰：上下股相减，余为法。置矩间，以下股乘之，如句高而一。所得，以入小表乘之，为实。实如法而一，即是楼高。

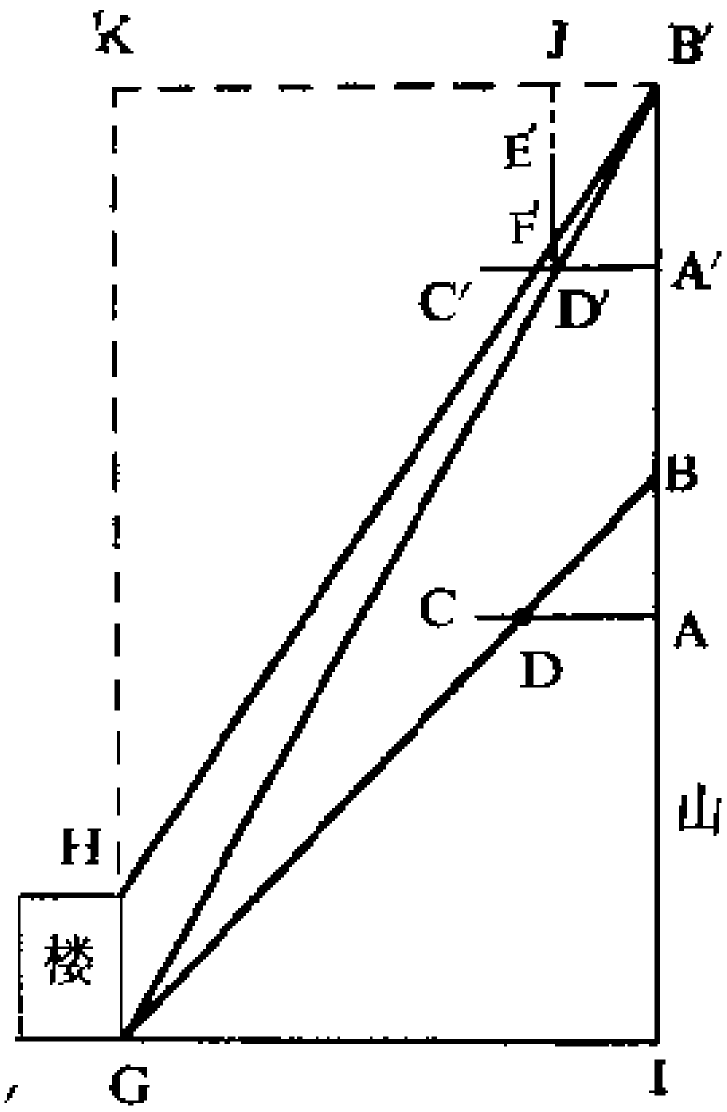
望楼公式：

$$\text{楼高}=\frac{\text{矩间}\times\text{下股}}{\text{句高}}\times\text{入小表}/(\text{下股}-\text{上股}).$$

证 如右图。视 GH 为山 HK 上之松，$D'J$ 为前表，却行至 B' 以望松。则从望松辅助公式得

$$\text{楼高}=\frac{(\text{山去楼}-\text{上股})\times\text{入小表}}{\text{上股}}+\text{入小表},$$

$$=\frac{\text{山去楼}\times\text{入小表}}{\text{上股}}.$$



望楼图

从句股相似形 $B'GI$ 与 $B'D'A'$ 得

$$\text{山去楼}/\text{上股}=(\text{山高}+\text{矩间}+\text{句高})/\text{句高}.$$

视 GI 为深谷，则从望谷公式得

$$\text{山高}+\text{句高}=\text{矩间}\times\text{上股}/(\text{下股}-\text{上股}).$$

由此诸式即得望楼公式。

望波口第六

[六] 望波口：

今有东南望波口(AB)。立两表南(D)、北(C)相去(CD)九丈，以索薄地连之。当北表之西却行去表(CE)六丈，薄地遥望波口南岸(B)，入索北端(CH)四丈二寸。以望北岸(A)，入前所望表里(GH)一丈二尺。又却后行去表(CF)十三丈五尺，薄地遥望波口南岸(B)，与南表(D)参合。问波口广(AB)几何？

术曰：

以后去表乘入索，如表相去而一。所得，以前去表减之，余以为法。复以前去表减后去表，余以乘入所望表里为实。实如法而一，得波口广。

望波口公式：

$$波口广=\frac{入所望表里\times(后去表-前去表)}{\dfrac{入索\times后去表}{表相去}-前去表}.$$

证 补作 JK 等线如图，今与望松题 2 相比较，令图中 $AB=$松，$AI=$山，$CH=$前表，$JK=$后表，则 $HK=$表间，$FJ-CE=$相多。在望松与望波口之间有下表中的关系。

今依望松公式有

$$松高=\frac{入表\times表间}{相多}+入表=\frac{入表\times(表间+相多)}{相多}$$

或即

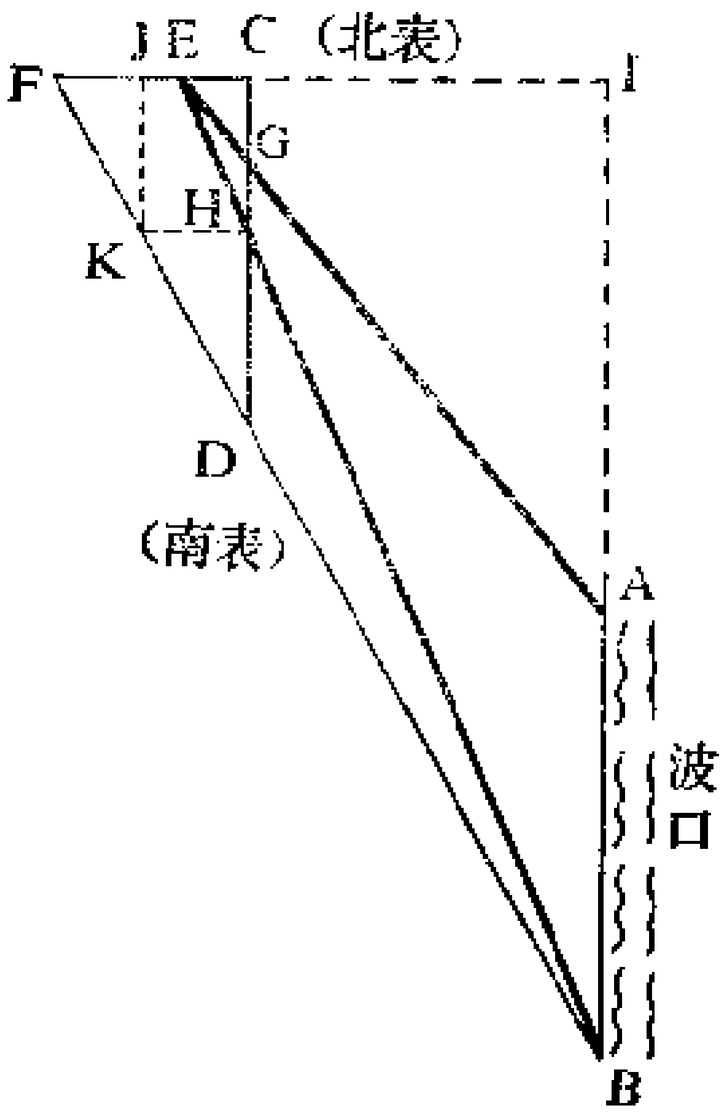
$$波口广=\frac{入所望表里\times(后去表-前去表)}{相多}$$

从句股相似形 FJK 与 FCD 有

$$FJ=\frac{JK\times CF}{CD}$$

或即

$$相多+前去表=\frac{入索\times后去表}{表相去}$$



望波口图

	望　　波　　口	望　　松
AB	波口	松
CH＝JK	入索	表高
GH	入所望表里	入表
EF	后去表－前去表	表间＋相多

以所得相多代入前波口广公式，即得所需公式。

望清渊第七

[七] 望清渊：

今有望清渊，渊下有白石(G)。偃矩(BAC)岸(AH)上，令

句(BA)高三尺，斜望水岸(F)，入下股(AE)四尺五寸。望白石，入下股(AD)二尺四寸。又设重矩($B'A'C'$)于上，其间(AA')相去四尺。更从句端(B')斜望水岸(F)，入上股($A'E'$)四尺。以望白石(G)，入上股($A'D'$)二尺二寸。问水深几何？

术曰：

置望水上、下股，相减，余以乘石上股为上率。又以望石上、下股相减，余以乘望水上股为下率。两率相减，余以乘矩间为实。以二差相乘为法。实如法而一，得水深。

望渊公式：

$$水深=\frac{矩间\times(上率-下率)}{(望水下股-望水上股)\times(望石下股-望石上股)},$$

其中　　上率＝望石上股 ×（望水下股－望水上股），

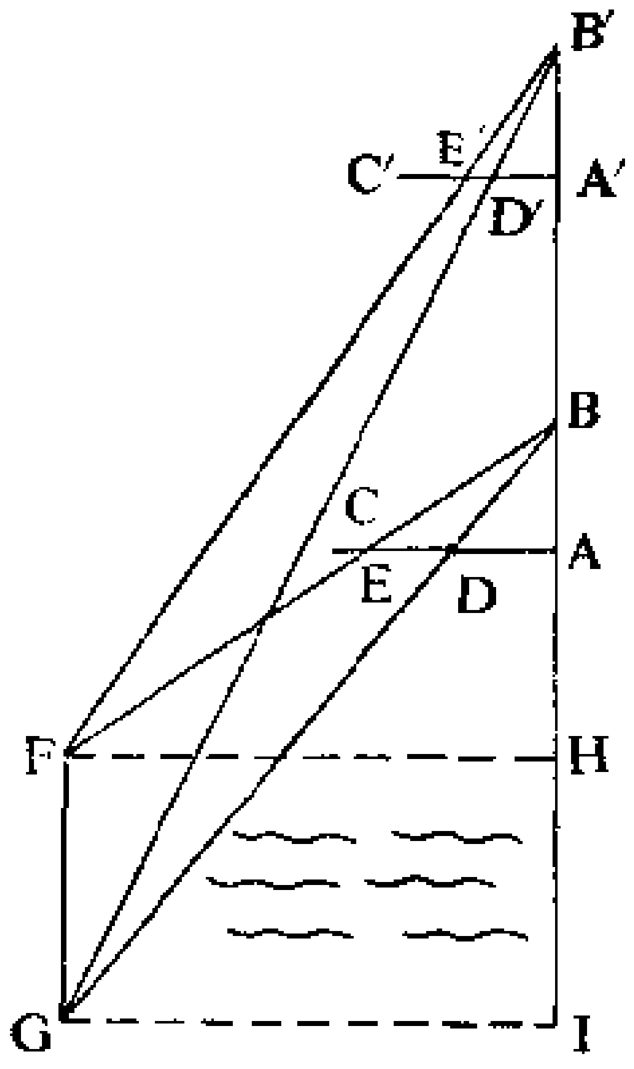
下率＝望水上股 ×（望石下股－望石上股）。

证　如图，FH 为水面，AH 为岸高，AI 为石深，FG 为水深。今视 GI 为深谷，G 为谷底，则 AI 为谷深，故依望谷公式有

$$石深=\frac{矩间\times望石上股}{望石下股-望石上股}-句高.$$

又视 FH 为深谷，F 为谷底。则 AH 为谷深，故依望谷公式有

$$岸高=\frac{矩间\times望水上股}{望水下股-望水上股}-句高。$$



（望渊图）

因

$$水深=石深-岸高。$$

故将上两式相减，即得所求望渊公式。

望 津 第 八

[八] 望津：

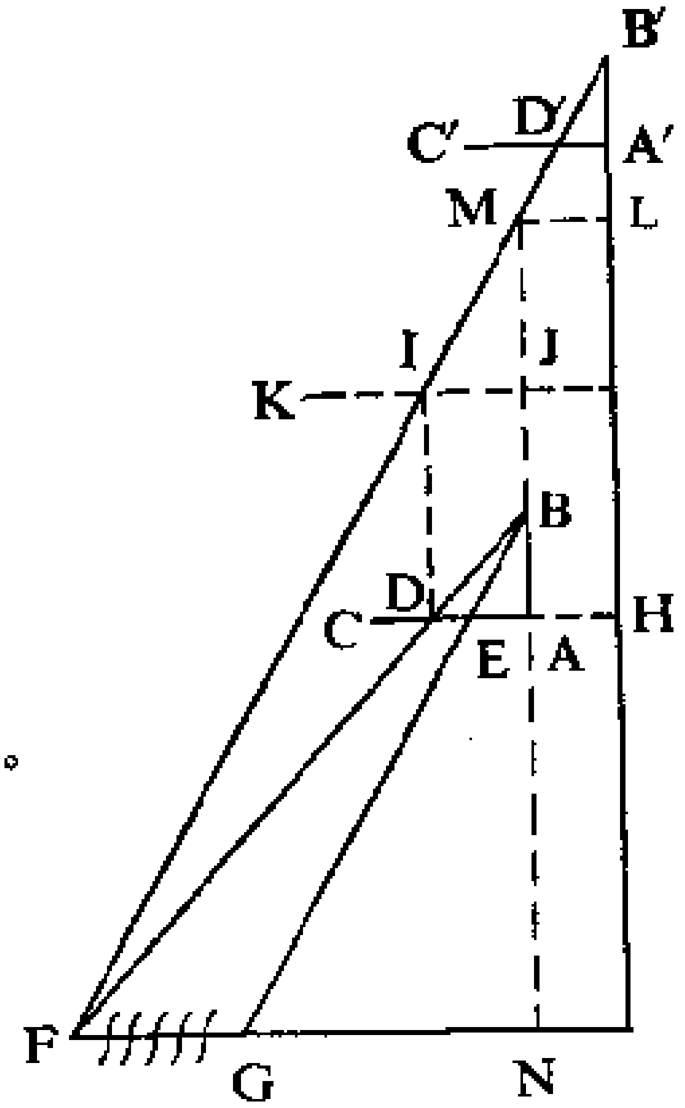
今有登山望津(FG)，津在山南。偃矩(BAC)山上，令句高(BA)一丈二尺。从句端(B)斜望津南岸(F)，入下股(AD)二丈三尺一寸。又望津北岸(G)，入前望股里(DE)一丈八寸。更登高岩，北却行(AH)二十二步，上登($A'H$)五十一步。偃矩($B'A'C'$)山上，更从句端(B')斜望津南岸(F)，入上股($A'D'$)二丈二尺。问津广(FG)几何？

术曰：

以句高乘下股，如上股而一，所得以句高减之，余为法。置北行以句高乘之，如上股而一，所得以减上登。余以乘入股里为实。实如法而一，即得津广。

望津公式：

$$津广=\frac{入股里\times\left(上登-\frac{北行\times句高}{上股}\right)}{\frac{下股\times句高}{上股}-句高}。$$



望津图

证 将附图与望松图相比较，视 FG 为松生山 GN 上，CA 与 KJ 为前后两表。由松高公式，得

$$松高=\frac{入表\times表间}{相多}+入表=\frac{入表\times(相多+表间)}{相多}$$

式中松高$=FG$ 即津广，入表$=DE$ 即入股里，表间$=AJ$。

又

相多$=MJ-AB=MJ-$句高。

相多+表间$=MJ+AJ-$句高$=LH-$句高

$=A'H-B'L=$上登$-B'L$。

故上式变为：

$$\text{津广}=\frac{\text{入股里}\times(\text{上登}-B'L)}{MJ-\text{句高}}$$

今从句股相似形 $B'LM$ 与 $B'A'D'$ 得

$$B'L=\frac{ML\times B'A'}{D'A'}=\frac{AH\times B'A'}{D'A'}=\frac{\text{北行}\times\text{句高}}{\text{上股}}\text{。}$$

又从句股相似形 MJI 与 $B'A'D'$ 得

$$MJ=\frac{IJ\times B'A'}{A'D'}=\frac{AD\times B'A'}{A'D'}=\frac{\text{下股}\times\text{句高}}{\text{上股}}$$

以之代入上津广公式，即得所求望津公式。

临 邑 第 九

［九］临邑：

今有登山(AL)临邑($HI\quad JK$)，邑在山南。偃勾(BAC)山上，令句高(BA)三尺五寸。令句端(B)与邑东南隅(J)及东北隅(K)参相直。从句端(B)遥望东北隅(K)，入下股(AE)一丈二尺。又施横句(EF)于入股之会(E)，从立句端(B)望西北隅(H)，入横句(EG)五尺。望东南隅(J)，入下股(AD)一丈八尺。又设重矩($B'A'C'$)于上，令矩间($A'A$)相去四丈。更从立句端(B')望东南隅(J)，入上股($A'D'$)一丈七尺五寸。问邑广(HK)、长(JK)各几何？

术曰：

以句高乘东南隅入下股如上股而一。所得，减句高，余为法。以东北隅下股减东南隅下股，余以乘矩间为实。实如法而

一，得邑南北长也。求邑广，以入横句乘矩间为实。实如法而一，即得邑东西广。

临邑公式：

$$\text{邑南北长}=\frac{\text{矩间}\times(\text{东南下股}-\text{东北下股})}{\dfrac{\text{东南下股}\times\text{句高}}{\text{上股}}-\text{句高}}$$

$$\text{邑东西广}=\frac{\text{矩间}\times\text{入横句}}{\dfrac{\text{东南下股}\times\text{句高}}{\text{上股}}-\text{句高}}。$$

证 先将附图与望松图相比较，视邑南北长 JK 为松生于山 KL 上，又视 DA 为表，从 B 点遥望，则

入表 $=DE=AD-AE=$ 东南下股－东北下股

表去山 $=AL$，

前表却行 $=AB=$ 句高。

依松高辅助公式有

$$\text{松高}=\frac{\text{表去山}\times\text{入表}}{\text{前表却行}}+\text{入表}=\frac{(\text{表去山}+\text{前表却行})\times\text{入表}}{\text{前表却行}}$$

或

$$\text{邑南北长}=\frac{BL\times(\text{东南下股}-\text{东北下股})}{\text{句高}}$$

次将附图与望谷图相比较，视 JL 为谷，AL 为岸。则谷深 $=AL$，句高 $=AB$。故依望谷公式有

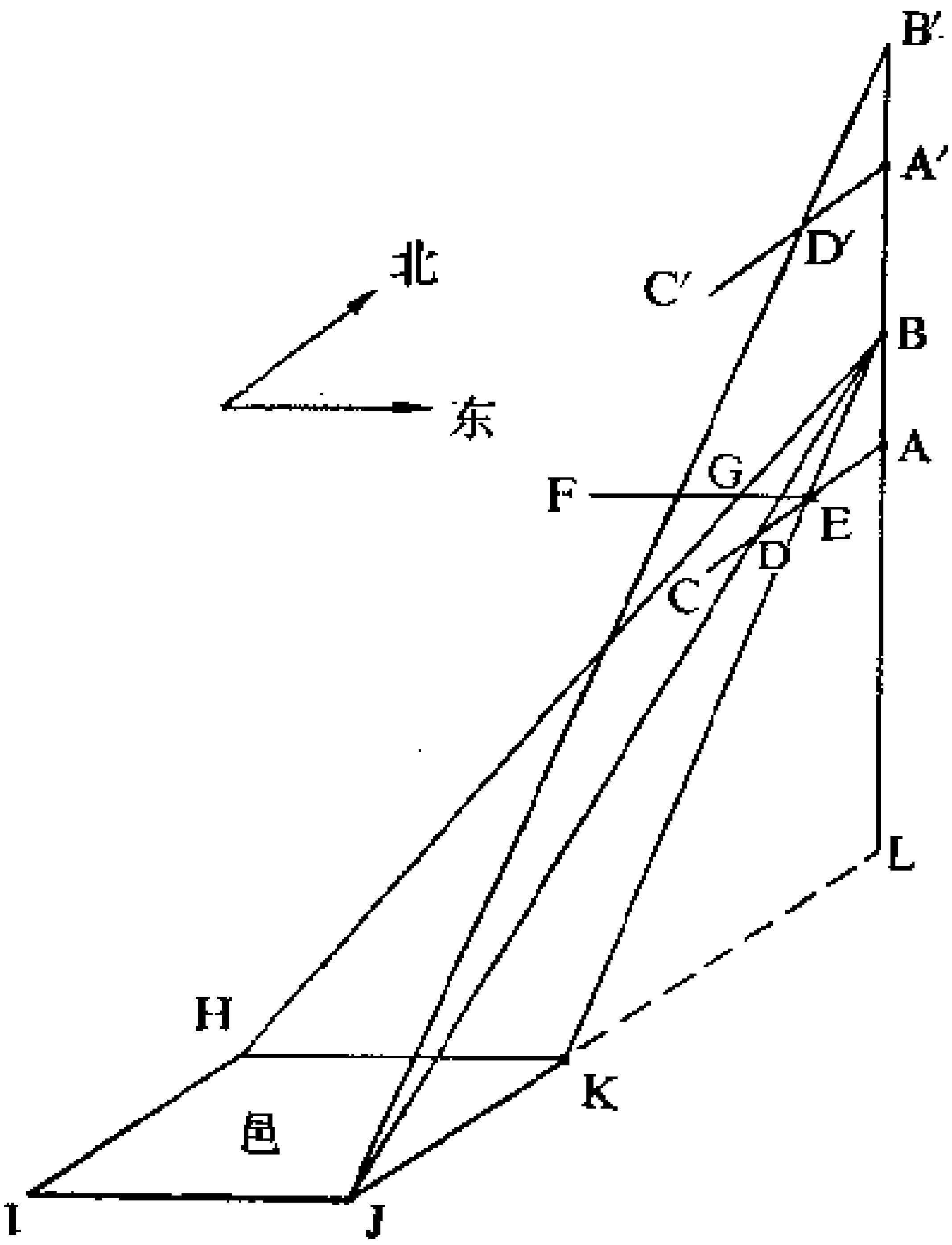
$$BL=\text{谷深}+\text{句高}=\frac{\text{矩间}\times\text{上股}}{\text{东南下股}-\text{上股}}。$$

以此代入前式，即得所求邑长公式。

其次在句股相似形 BHK 与 BGE 中，

$HK=$ 邑东西广，$GE=$ 入横句，故有

$$\text{邑东西广}=\frac{BK\times\text{入横句}}{BE}$$



临邑图

又由句股相似形 BKL 与 BEA 得

$$\frac{BK}{BE}=\frac{BL}{BA}=\frac{BL}{\text{句高}},$$

故得

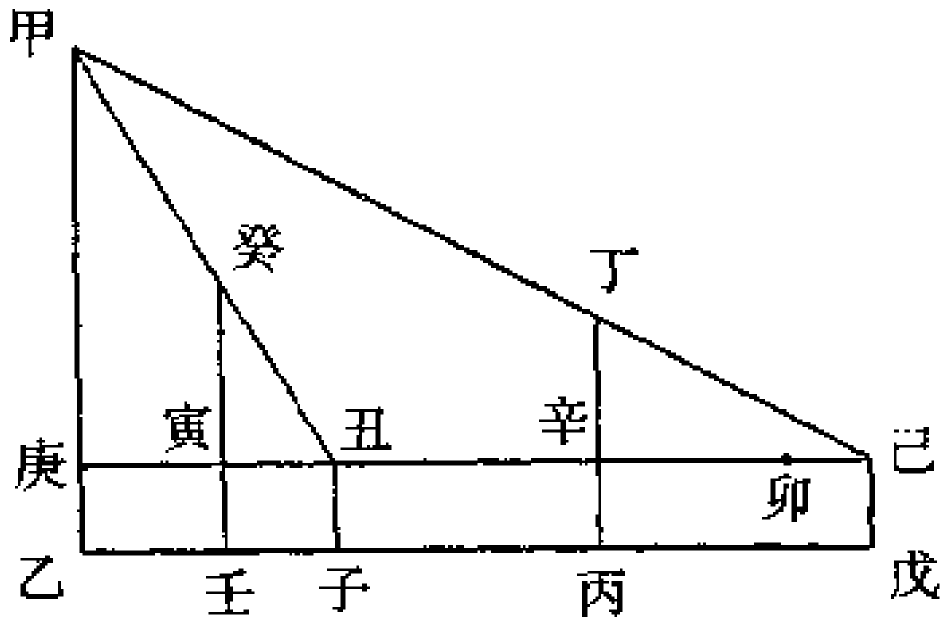
$$\text{邑东西广}=\frac{BL\times\text{入横句}}{\text{句高}}。$$

将 BL 依前式代入，即得所求邑广公式。

附　　录

利玛窦口译徐光启笔授的《测量法义》第 10 题以表测高以及

徐光启《测量异同》第四题以重表兼测无远之高无高之远，实质上即《海岛算径》的望海岛第一题，衹是添上了人高而已。图中甲乙为欲测之高，癸壬、丁丙为表，丑子、己戊为人，利玛窦原证照录如下：



论曰，两测较卯辛与表目较辛丁或癸寅，其比例若距较戊子或己丑与庚甲。何者。己辛与辛丁既若己庚与庚甲[五卷四]，更之，即己辛与己庚若辛丁与庚甲也[五卷十一]，依显丑寅与丑庚若寅癸与庚甲也，则丑寅与丑庚亦若辛丁与庚甲也，[辛丁与寅癸等故]，而己辛全线与己庚全线若己辛所截取之己卯，[己卯与丑寅等故]，与己庚所截取之丑庚也，则己辛全与己庚全亦若己辛分余之卯辛与己庚分余之己丑也[五卷十九]，前已论己辛与己庚若辛丁与庚甲即卯辛与己丑亦若辛丁与庚甲也。更之，即两测较卯辛与表目较辛丁若距较等子戊之己丑与甲庚也。若却后而得壬子，则反上论之。

后　记

本文写成后重读李继闵同志的《从句股比率论到重差术》，李文提出对重差一词的解释以及我国古代测望理论“出入相补”—→“相似句股理论”—→重差术的发展过程，论证令人信服。但若仅用比例重差来证明，则海岛图不应再添许多线段以补成若干长方形，这显与杨辉、李潢所见的旧海岛图不同，一个可能是杨李所见的旧图并非刘徽所用的重差图。可惜刘徽的《重差图说》已经失传，难以印证。不论如何，这些证明在细节上略有出入，基本上都体现了我国古代几何学的固有特色，与以平行线等作为中心

概念的欧几里得几何体系异其情趣，这应该是肯定的。

参考文献

[1] 钱宝琮校点：《算经十书》，中华书局，1963。
[2] 《周髀算经》。
[3] 魏、刘徽，《九章算术注》，263。
[4] 魏、刘徽，《海岛算经》，263。
[5] 赵爽，《日高图说》。
[6] 宋、杨辉《续古摘奇算法》，1275。
[7] 利玛窦口译，徐光启笔受，《测量法义》，1607—1608。
[8] 明、徐光启，《测量异同》。
[9] 清、李潢，《海岛算经细草图说》，1820。
[10] 清、李潢，《重差图序》，1820。
[11] 李俨，《重差术源流及其新注》《学艺》，1926，7卷8期，1—15。
[12] 李俨，《中国数学大纲》，科学出版社，1958，编Ⅰ章9。
[13] 钱宝琮，《中国数学史》1964。
[14] 吴文俊，《数学史评之一。我国古代测望之学重差理论评介。兼评数学史研究中的某些方法问题》，北京“中国数学史座谈会”，1976，
[15] 吴文俊，《出入相补原理》，《中国古代科技成就》，中国青年出版社，1978，89—100。或本书。
[16] 白尚恕，《刘徽海岛算经造术之探讨》。
[17] 李继闵，《从句股比率论到重差术》，全国自然科学史学术会议，1980。
[18] Y. Mikami, The development of mathematics in China and Japan, 1913.

《九章算术》与刘徽的测量术

沈 康 身

一 《九章算术》的测量术

«九章算术»有以下测量问题：

1．直接步测或尺量边长，求各种图形面积或体积。方田章载丈量平面图形面积题共 24 则，商功章载测量体积题共 22 则。

2．句股章有间接测量题 8 则：有的先用简单工具量度可以接近的距离，有的不用工具、利用地面条件只作步测、以计算待求的高、远。测法有三种：

(1) 立表法 如第二十四题："今有井径(DC)五尺，不知其深(DA)。立五尺木(CF)于井上，从木末(F)望水岸(A)，入径四寸(EC)。问井深几何？""答曰：五丈七尺五寸"，"术曰：置井径五尺，以入径四寸减之，余、以乘立木五尺为实。以入径四寸为法，实如法得一寸"(图 1)。

立木就是表，标竿，从刘徽注可知当时是用相似三角形对应边成比例原理求解的，按题意立出比例式后，问题就化为已知三数求第四比例项。

(2) 连索法 如第二十二题："有木(F)去人(A)不知远近。立四表(A、B、C、D)，相去各一丈。令左两表与所望参相直。从后右表(D)望之，入前右表(EC)三寸。问木去人几何？""答曰：三十三丈三尺三寸少半寸"。"术曰：令一丈自乘为实，以三寸为实，实如法而一"(图 2)。

事实上表，B、C 间必连索，以便量取视线 DF 与前右表(C)"距离"(EC)。按题意立比例式即得解。

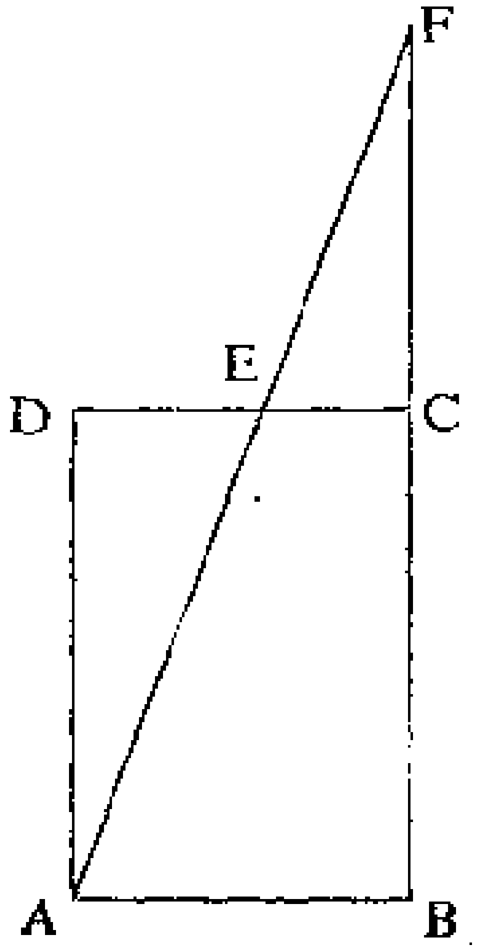


图 1

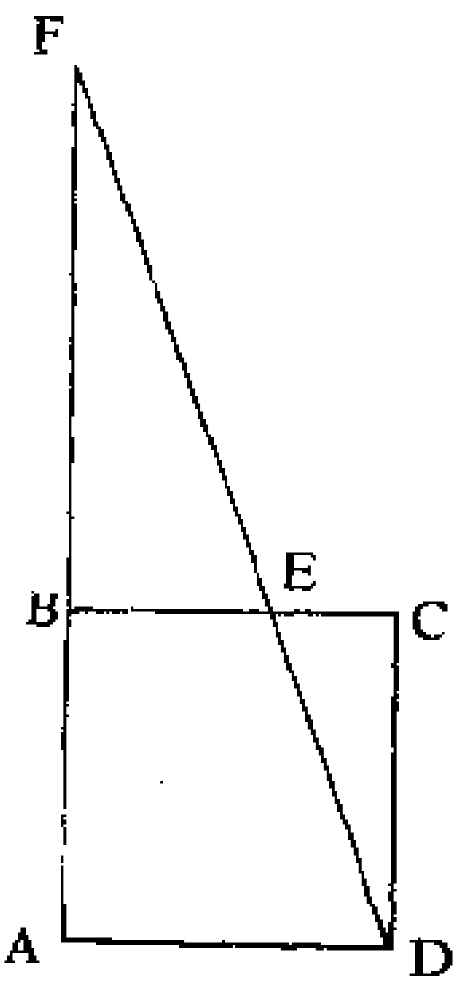


图 2

(3) 参直法　如第十九题："今有邑方不知大小，各中开门。出北门(F)三十步有木(E)。出西门(G)七百五十步见木。问邑方几何？""答曰：一里。""术曰：令两出门步数相乘，因而四之，为实。开方除之，即得邑方"(图 3)。

本题只作步测，取得必要数据后，立比例式，问题就化为已知二数求比例中项。

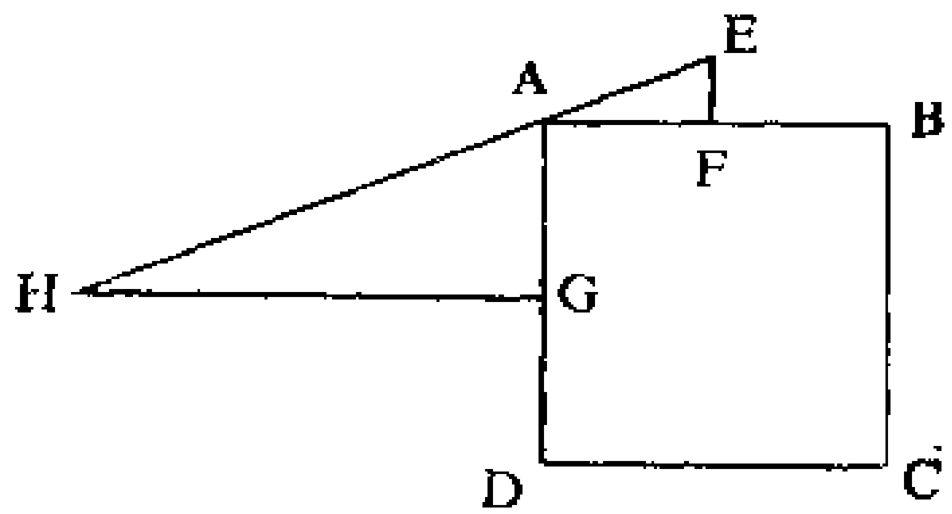


图 3

二 刘徽的创见

刘徽在测量术方面有所创新。

《周髀算经》卷上在商高答周公用矩之道时说："平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远"。矩是我国古代测量工具，它是直角相交长、短二尺构成，用来做间接测量。例如偃矩以望高：人手持矩，纵边为 $B'A'$，量树高(EA)时，当矩的纵边被视线 CA 截于 A'。量出地面上距离 $DE=CB$，所求树高为(图4)：

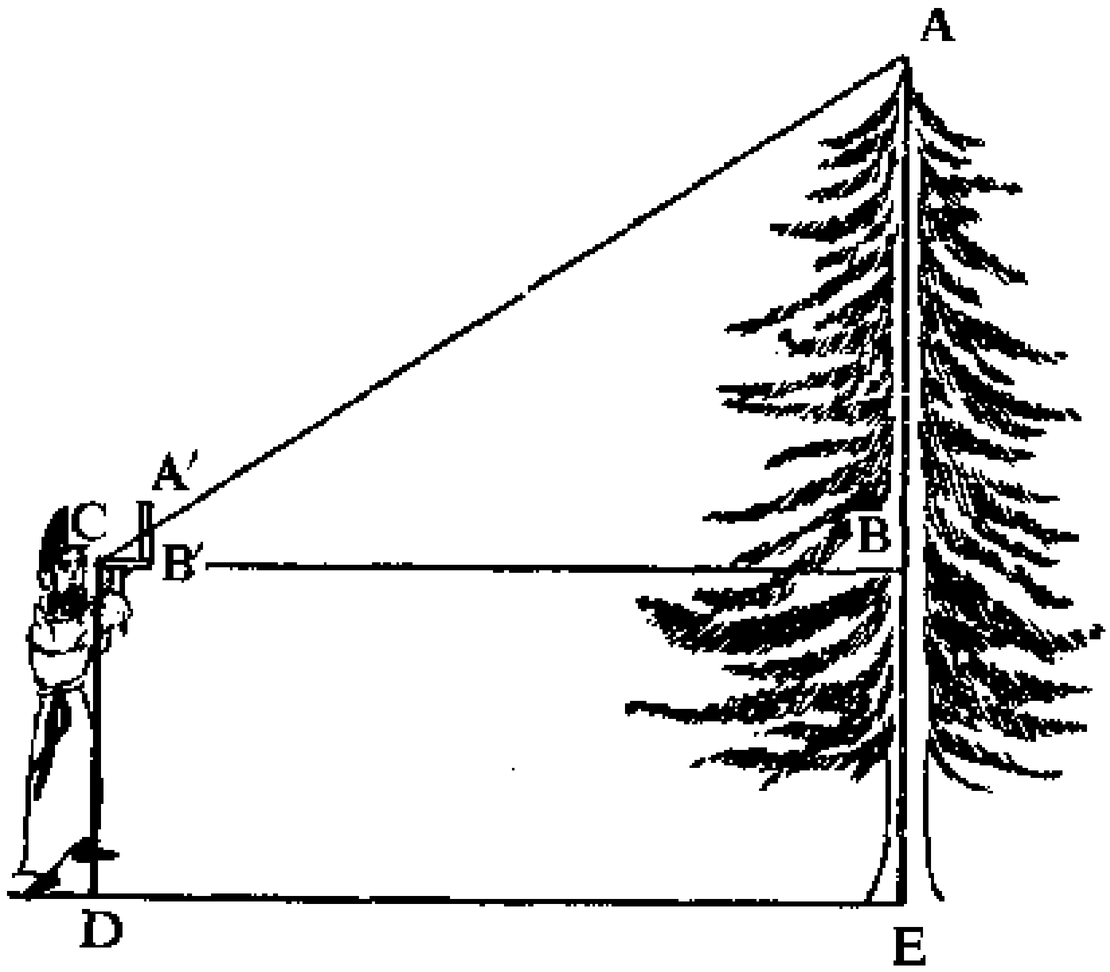


图 4

$$EA=\frac{CB}{CB'}\cdot A'B'+CD=\frac{DE}{CB'}\cdot A'B'+CD$$

《周髀算经》这一矩测法是有局限性的，正如刘徽在《九章算术》注序中说："凡望极高、测绝深而兼知其远者，必用重差。"就是说所测目标不能靠近时，要用两次或两次以上测量。他所说的是："度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望"。

事实上，他在《海岛算经》所设九题中第一、四、八、九题就分别用重表、累矩、三望和四望解决，例如：

(1) 重表法 《海岛算经》第一题："今有望海岛，立两表齐高三丈($CA=DB=h$)，前后相去千步(表间 $AB=l$)，令后表与前表参相直。从前表却行一百二十三步 ($AE=a$)，人目著地取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步($BF=b$)，人目著地取望岛峰，亦与表末参合。问岛高($y=GH$)及去(前)表($x=HA$)各几何？""答曰：岛高四里五十五步，去表一百二里一百五十步。""术曰：以表高乘表间为实，相多为法，除之，所得加表高，即得岛高。求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实，相多为法，除之，得岛去表里数"(图 5)。

从术文知所求

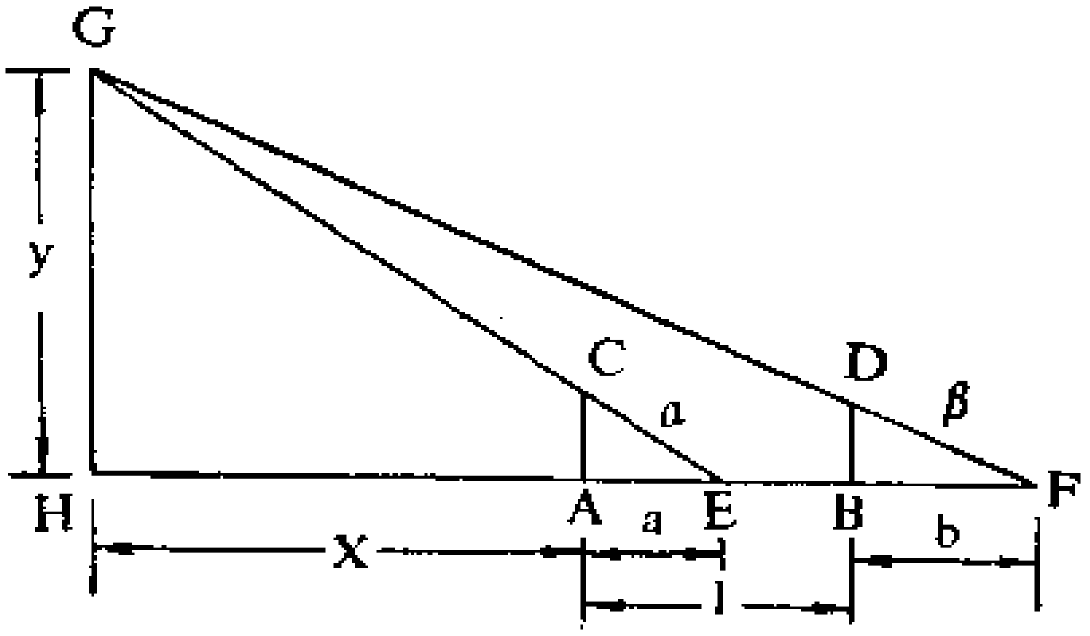


图 5

$$y=\frac{hl}{b-a}+h,$$

$$x=\frac{al}{b-a}。$$

显然，刘徽所说的重表法是《周髀算经》测日高的方法，也可看作是《九章算术》句股章立表法的发展。

(2) 累矩法 《海岛算经》第四、五，第七至第九题重复运用《周髀算经》矩测法，解决了单测一次所不能解决的问题①。

(3) 连索法 《海岛算经》第六题综合运用《九章算术》句股章立表法和连索法解决河宽问题①。

三 刘徽测量术述评

刘徽三国魏人。魏、在我国北方，刘徽写海岛算经，可能他生长在海边，故乡当在齐鲁一带。《海岛算经》所引数据都选自测量实践，是合乎实际的。例如楼高八丈，按魏时尺合今 24.1 厘米左右；八丈合 19 米多②，邑方三里四十三步四分步之三也比较近情合理。第一题利用两次测望，前后两表相距千步，从后表通过前表看目标远山，"参相直"这一测量操作是可以完成的，因为从 1000 步外看 3 丈的标竿，视角是 $\operatorname{arctg}[30\div(1000\times6)]=\frac{1}{200}$，约 20′ 弱，可以看得很清楚。

刘徽《海岛算经》九题测量术在数学推导及所求结果又是无可指责的。

刘徽测量题在实际操作上有值得商榷的地方：

(1) 水平 《周髀算经》在商高答周公问用矩之道、平矩以正绳之下，赵爽有注文。赵爽认识到矩底边严格水平对测量结果精度的严重意义，他注道："以水绳之正，定平悬之体，将欲慎毫厘之差，防千里之失"。《海岛算经》第一题必须限制前、后两表之底在同一水平面内才能保证岛高、岛远公式有实际意义。也许海边沙滩有这个条件，否则得事前用"水绳之正"(水准仪抄平)。《周礼·考工记》说："匠人建国，水地以悬"。说明远在周代，我国已能做水准测量；又年代与刘徽较接近的隋代有"水工并解算

① 吴文俊，《<海岛算经>古证探源》，本书。

② 今山东聊城县光岳楼通高33米，合魏尺13丈余。

术士，取河南北平地之所，可量数百里，南北使正，审时以漏，平地以绳”的纪录。这里所说水工，当是水准测量工作者，平地以绳，就是水准测量。然而要取得一千步严格水平距离，工作量是巨大的。同样在累矩法测量中，矩底严格水平的要求也是一个十分突出的问题。

(2) 方向 《海岛算经》测量题中有东、南、西、北四个正向以及东南、东北、西北、西南共八个方位的指向，例如第八题，波口南北向，而所立两表也必须南北向，二者应严格平行，计算结果才有意义。战国时著作《韩非子》有司南的做法：用天然磁石做成球形勺子放在带有刻度的铜盘上，测方位时，旋转勺子，勺停、勺柄指南方。估计刘徽时代借此定方位。

(3) 平距、高差 《海岛算经》累矩法五题都要求测量者带着矩，自下而上作两次或两次以上测望，都要求知道前后两次矩所在位置：用平矩和高差表示。我们认为在当时条件下这些数据是很难取得的。

(4) 表间、却行差 以《海岛算经》第一题为例，表间长度(l)，两表选定地点 A、B 与岛的相对位置都会影响结果精度(图5)。

$$y=\frac{hl}{b-a}+h$$

假定表高 h 为常数，那末岛高相对误差

$$\begin{aligned}\delta&=\left|\frac{dy}{y}\right|=\left|\frac{d(l)}{l}+\frac{h}{b-a}[d(a)-d(b)]\right|\leqslant\\&\leqslant\left|\frac{d(l)}{l}\right|+\left|\frac{h}{b-a}\right|(|d(a)|+|d(b)|)=\\&=\left|\frac{d(l)}{l}\right|+\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}(|d(a)|+|d(b)|)。\end{aligned}$$

可见，在直接测量件 a、b、l 误差 $|d(l)|$、$|d(a)|$、$|d(b)|$ 不变时，

表间(l)拉长一些，二次却行差放大一些，也就是说前表尽量靠近目标，后表远离目标，岛高精度可以提高。在刘徽第一题所定数据中，表间距离(1000 步)长有余，而前后二次却行差则不足，以致如折合角度只 $\alpha\sim\beta\doteq10'$弱。

四　与外国比较

古代埃及人、古代希腊人怎样测量，已没有当时文献可徵。传说古希腊数学家 Thales 在埃及测金字塔高，测法是：用一根已知长度的杆子，通过同时测量杆影和金字塔影之长，求出金字塔的高度。还有说他：利用关于三角形的这一类知识（相似三角形性质）计算过船舶到海岸的距离。如果这确是事实，古代西方测量术只限于一望。直到 1530 年数学书上有测井深的插图（图 6），这与我«九章算术»立表法相仿佛，十六世纪开始欧洲在测量术上有改进，例如 1569 年在威尼斯出版的书籍上有相当于«海岛

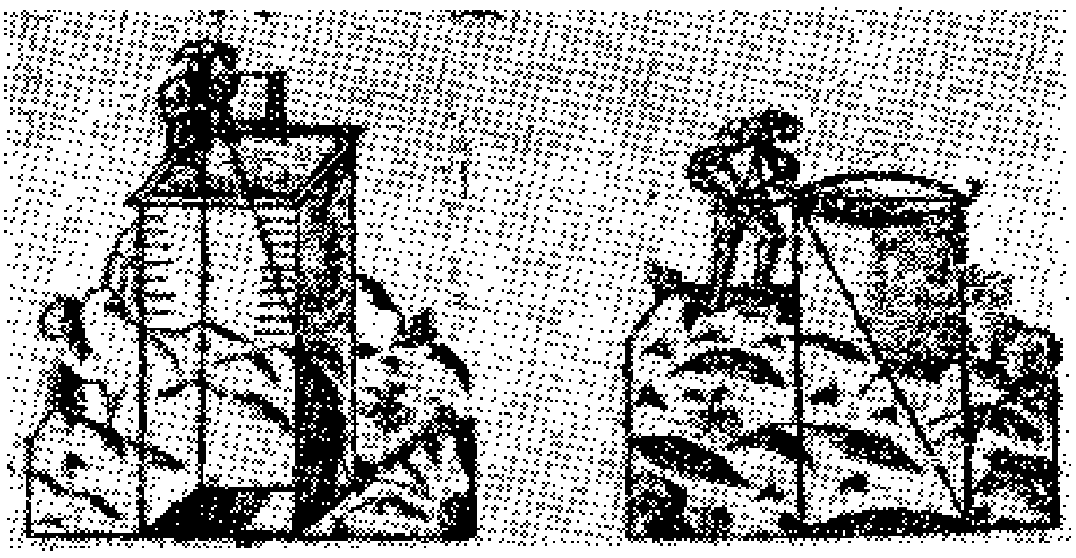


图 6

算经»第一题的间接测量（图 7），图中明显可见也利用表间、表高数据以计算塔高和塔远。又如 1530 年在法国巴黎出版物上有用十字杖做间接测量的例子(图 8)。十字杖长 4 英尺，有一条与杖垂直的滑尺(CD)前后可移动。先测地面上 IH 长，120 英尺，由

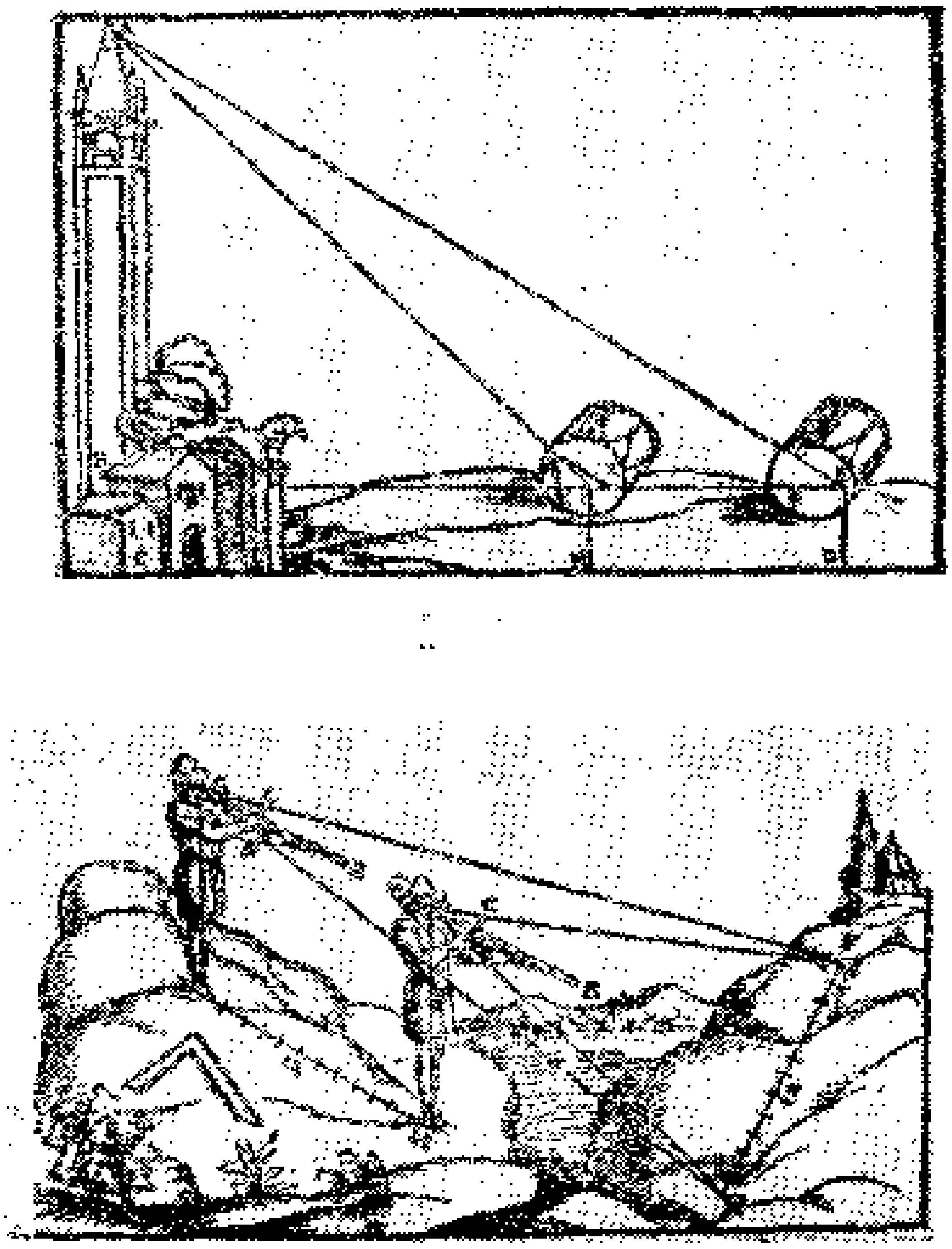


图 8

于滑尺定长，先在H处移动CD，使ACF，ADG各“参相直”，量出H处AE之长，同法再在I处量出AE之长。这样通过“二望”，就可算出所求距离FG。这实在与我国累矩法又相类似。然而上引二例较刘徽已迟出一千多年。

正因为欧洲测量术当时水平不高，所以明末由罗马教士利玛窦(M. Ricci, 1552—1610)带来的测量术也极粗浅，例如当时由利玛窦口授，徐光启笔述的《测量法义》共录十五测例，而其中绝大多数《九章算术》、《海岛算经》早已著录，只是由于各种原因译书者没有看到我国古算原作，所以误解“刘徽、沈存中(括)之流，

皆尝言测望矣，能说一表，不能说重表也”。这一误解，在此顺便提出澄清真相。

参 考 文 献

[1] 吴文俊，《〈海岛算经〉古证探源》。本书。
[2] 沈康身，《我国古代测量技术的成就》，《科学史集刊》，1965。
[3] D. E. Smith, History of Mathematics, 1925.
[4] M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, 1972.

中国古代的分数理论

李 继 闵

分数算法在远古时代的埃及、巴比仑和中国都已产生。然而，东方和西方的分数理论各有渊源，各自独立发展，形成各不相同的理论体系。如所周知，古代埃及人的分数算法是化为单分数(unit fraction)进行的；而巴比仑人则是采用六十进分数。由于西方古代分数表示和计算方法的繁杂，致使欧洲分数理论长期停滞不前，直到十五世纪以后才逐步形成现代的分数算法。

我国古代数学在分数理论方面有着悠久的历史和卓越的贡献。《九章算术》是世界上系统地叙述分数算法的最早著作。其所以能远在欧洲之前大约一千五百年便建立了成熟的理论，是与我国古代人民高度的理论创造能力和筹算制度的优越性分不开的。

我国古代的分数算法是有着严密理论的筹算，具有自己独特的风格。无论从分数概念、表示和运算方法来看，都与西方迥然不同，也与现代的分数算法有异。只有弄清我国古代分数理论发展的特点，才能明了我国何以能遥遥领先。不仅如此，分数算法是我国古代算学理论的重要基础，为着研究中国古代算学理论体系，有必要首先对我国古代分数理论做一番认真的探讨。

一 从古汉字研究看分数的起源

分数在我国起源于何时，有待详考。据现今对古汉字的发掘与研究来看，至少可以上溯到文字出现的初期①。

---

① 李约瑟曾据董作宾的殷历研究推断殷商时期已惯用分数（见《中国科学技术史》卷三、第十九章七节）；但董氏关于殷历为古四分历的说法不能成立。

原始的分数概念来源于连续量的分割。殷商甲骨文中的八字，据考释即是"分"的意思①。《说文·八部》："八，别也。象分别相背之形"。周代金文中已常用分字。《说文·八部》："分，别也。从八从刀，刀以分别物也"。

在两周的金文中表示分数的汉字已屡见不鲜。战国铜器铭文中常见一个从斗从八的籴字。据古文字学家的研究，籴当释为料。现存战国时代流行于齐的量器子禾子釜上又有从升从半的籿字，可能与料是同一个字的不同写法②。《说文·斗部》："料，量物分半也。从斗、半，半亦声。"

战国时代的籴(料、籿)一般用作半字。例如，战国铜器铭文中有

(1) 公刍籴石(《三代吉金文存》18.33 权)

(2) ……四两籴。(《洛阳金村古墓聚英》第十一图银制小象)

(3) 卅二年，平安邦𣂼(司)客，肻(容)四分甐，五益六釿籴釿四分釿平。(《三代》4.20 鼎)

其中，(1) 的"籴石"当释为"半石"；(2) 的"四两籴"即为"四两半"；(3) 中的"籴釿"就是"半釿"。而战国的货币文字中，如

(4) 晋阳籴

(5) 闵(蔺)籴

(6) 大阴籴

这些置于地名之后的籴字，显然都应释为半。可见籴字在战国时期与半通用，作为数词二分之一③，即《说文》所谓的"量物分半"

---

① 郭沫若《甲骨文字研究·释五十》："八者别也，分也"。用作数字八乃属假借。

② 见朱德熙、裘锡圭《战国时代的"料"和秦汉时期的"半"》，文史、第八辑、中华书局、1980。

③ 马国权《两周铜器铭文数词量词初探》(见《古文字研究》第一辑，中华书局，1979)，认为"半"在周代表示约数。这在最初是可能的，但在战国时用作分数是无疑的。

的意思。

斗和半在战国和秦汉时期还用作专用量名。据考证①，斗在战国三晋地区作半齋的专名。例如，

(7) 十三年，梁阴命(令)達、上官冢子疾、冶勳封(铸)，唐(容)斗。(«三代»3.40鼎)

其中的斗即是半齋②。到了战国晚期，斗成为最常用的容量单位，此时斗便成为半斗的专用名③。秦汉时期又常常称半斗为半。«汉书・项籍传»：“今岁饥民贫，卒食半菽”。颜注引孟康曰：“半，五升器名也”。

战国金文中表示分数的汉字还有券和罗，应释为“三分”和“四分”。如

(8) 上乐床(厨)，唐(容)券(三分)。(«三代»2.53鼎)

(9) 上官，唐(容)券(三分)。宜諆(信)口，唐(容)券(三分)。(«三代»2.53鼎)

(10) 梁廿又七年，大梁司寇[肖]亡(无)智封(铸)，为量唐(容)四分。(«三代»3.43鼎)

据铭文及容量实测，可知三分、四分是指三分之一齋和四分之一齋。④而

(11) 卅二年平安邦冶客眢(容)罗(四分)齋五益(镒)斗斩罗(四分)斩平。(«平安鼎»)

其中的罗齋即是四分之一齋；罗斩乃是四分之一斩。同样，在秦汉时代常常称三分之一斗和四分之一斗为参和四，例如«墨子・杂

① 见朱德熙、裘锡圭«战国时代的“料”和秦汉时期的“半”»文史、第八辑、中华书局、1980。

② 齋作为量名不见载于史籍。据历史博物馆所藏弗官鼎实测的容量为7090毫升；而上引(7)鼎的容量实测3560毫升，与半齋相符。

③ 郭沫若曾认为料是半升的专字，朱德熙对此提出异议，见①。

④ 据此三器之实测容量分别为2480,2350和1400毫升，除(10)之数值偏低外，其它二器一料之值与弗官鼎及(7)相近。

守»：“斗食，食五升。参食，食参(三)升小半。四食，食二升半”。

综上所述，半(㪸、料、姅)、叁(参)、罖(四)作为古汉字的数词，亦曾作为专用量名，可见起初它们是作为细分而得的更小的度量单位而引进的。即使在用作分数时，在量的度量意义上，它仍然是当作一个整体来看待的。这一点更可以从金文中分数的表示法中看到，例如(3)和(11)中用“㪸斩四分斩”而不用“四分之三斩”。类似的例子还有

(12) 右胅(厨)，三㪸丰(㽙？)。(«三代»2.53 鼎)

(13) 口冂城(？)三㪸锁(鼎)。(«三代»2.53 鼎)

其中用“三㪸”即“三个半斗”而不用“一斗半”，这便说明㪸具有独立的单位意义。这种情形与古代埃及人用单分数来表示分数非常相似。这种表示法决不是古人的爱好，而正好证明㪸、叁、罖之类的单分数最初确实是度量的单位。«九章»少广章前十一问，其田广都采用所谓分数的“连续记法”①，即表为“$1+\frac{1}{2}$”，“$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$”，…，“$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{12}$”，正是这种单分数表示法的痕迹。

在晚周的铜器铭文中已出现了与现代相近的一般的分数记叙法，其式为：“母”数，次“分”字，次“子”数。(古籍习用的“几分之几”的“之”字被略去。)例如②

(14) 大良造鞅爰积十六尊五分尊一为升。(«商鞅量»)

这里的“十六尊五分尊一”即是“十六尊五分之一尊”。由此可见，在原始的分数概念中，“几分之几”即是“几个几分”的同义语；这个“几分”(后来被称为分母，并常略去“分”字)是由半、叁(参)、罖(四)发展而来的，它被看作度量的单位；而这里的“之几”的“几”(后来被称做分子)是代表用“几分”作单位去度量所得的量

---

① 李俨称这种单分数表示法为“连续记法”见«中算家的分数论»，中算史论丛，第一集，P 28。

② 商鞅量造于秦孝公十八年(公元前 344 年)，可见战国中期已有一般分数记叙法。

数。因而，作为表示量值大小的分数，同样被理解为用同类量的单位去度量的结果，即是量与其单位之比。

至迟在战国末期，分数的概念便有了新的发展。从《睡虎地秦墓竹简》中大量出现的分数来看，随着分数的广泛应用，其意义已不再是"度量单位的细分"。《秦律十八种·效》中有文："度禾、刍稾而不备十分一以下，令复其故数；过十分以上，先索以稾人，而以律论其不备"。①这里的"十分一"和"十分"(分子"一"被省去)即是"十分之一"。文中用以表示原数的十分之一，显然，这里的"十分"已没有"单位"的意义了。再有《秦律十八种·金布律》中有文："及隶臣妾有亡公器、畜生者，以其日月减其衣食，毋过三分取一"②。此处的"三分取一"即是三分之一。分子前加"取"字，清楚地指出三分之一的意思即是将物之量三等分取其中之一等分。这样的分数概念已和现代完全一致了。

二　法实相推与分数概念的定义

《九章算术》中的分数是从除法运算引进的。合分术有云："实如法而一。不满法者，以法命之"。其所谓"命之"，即是"命分"③。这句话可今译为："被除数除以除数。如果不能除尽，便定义了一个分数"。

法与实在此即是除数和被除数。何以称之为法、实？《说文·宀部》："實，富也。从宀从贯；贯，货、贝也"。是说"实"是钱财货物之总称，即泛指一切实物。关于"法"的涵义，李约瑟解释为"用法律固定的单位量度"④，这是很有道理的。我国从西周以至秦汉，度量衡制度都作为国家颁行的一项重要法令。《大戴礼

① 见《睡虎地秦墓竹简》，秦律十八种，P 97。文物出版社。1978。

② 同①，P 60。

③ 这在乘分术刘徽注中明确指出："凡实不满法者，有母子之名"。

④ 见李约瑟《中国科学技术史》，卷三，第十九章五节。

记·明堂位》记载："周公六年，朝诸侯，明堂位，制礼，作乐，颁度量，而天下大服"。公元前221年秦始皇所颁统一度量衡的诏书说："廿六年，皇帝尽并兼天下诸侯，黔首大安，立号为皇帝。乃诏丞相状、绾，法度量，则不壹歉疑者，皆明壹之"。可见度量单位在我国古代确实含有"法"的意义。其所谓"实如法而一"，即是"以法量实"，"实"中有等于"法"的量，所得是一，"实"中有几个"法"，所得就是"几"。物的数量就是物(实)与单位(法)的比值。除法的意义正是由此引伸而来的。古代原始的分数概念正与此相通，分母("几分")确实曾作为法定的度量单位（如半、参、四），而分数"几分之几"便是"实如法而一"的结果。由此可见，《九章》用除法来引进分数，是对原始的朴素的分数概念的自然发展。

《九章》约分术提出了分数的基本性质，即"分子、分母同乘或同除一(不为零的)数，其值不变"。约分术是作为化简分数的法则来讲的。术曰："可半者半之，不可半者，副置分母子之数，以少减多，更相减损，求其等也"①。徽注云："设有四分之二者，繁而言之，亦可为八分之四；约而言之，则二分之一也。虽则异辞，至于为数，亦同归尔"。合分术注又说："约而言之者，其分麄(粗)；繁而言之者，其分细。虽则麄细有殊，然其实一也"。这里，刘徽指出约分术的理论依据是分数的基本性质；而同一个分数的表示可以有繁、约之不同，乃是反映了"分"的细密与粗疏。刘徽将这一基本性质概括为分数的两条变形规则。

一是"乘以散之"，即是分子、分母可以同乘以一(不为零的)数，(这称为"散分")；

二是"约以聚之"，即是分子、分母可以同除以一(不为零的)

---

① 这里提出了用"更相减损术"来求最大公约数。在少广术中又提出了求最下分母(最小公分母)，据沈康身推断，亦由更相减损术求得。(见本书《更相减损术源流》一文)。

数，(此即"约分")。

中算家的分数概念实质上是把分数看作法与实(即母与子)的比。刘徽在《九章》注中经常用比率性质来解释分数算法。经分术徽注云："凡数相与者谓之率。率者，自相与通。有分则可散，分重叠则可约也。等除法实，相与率也"。大意是说，凡数构成一组比就叫它们为"率"；率是彼此相通的①。(率是可以"乘以散之，约以聚之"的，所以)当率中有分数时，则可同乘以一数而去掉分母；而当各率有公因数时，则可约去。法与实便是一对率，若用最大公因数去除法与实，便得到一组最简的(互质的)率。这里，刘徽不仅指出法与实构成了一对比，而且根据比的基本性质，可以

(1) 化分数比为整数比(有分则可散)；

(2) 对比的各项实行约分(分重叠则可约也)。

即是

$$\frac{b}{a}:\frac{d}{c}=\left(\frac{b}{a}\times ac\right):\left(\frac{d}{c}\times ac\right)=bc:ad$$

及

$$ab:ac=(ab\div a):(ac\div a)=b:c.$$

一对法、实定义一个分数，若法与实亦为分数，这便自然引导出繁分数的概念。《九章》经分术有云："重有分者同而通之"。徽注："此谓法实俱有分。"这就是说"重有分"即是分子分母皆为分数的繁分数。②

---

① 这里的"通"是一个比"同"涵义更广的概念，它包含对应的意思。例如，"粟率五与粝率三相通"，是指粟五与粝三等价(故可彼此交换)；而"周率三与径率一相通"，乃是说当周为三时，其对应的径为一。关于比率相通的意义，参见本书<《九章算术》中的比率理论>一文。

② 李俨曾将"重有分"释为"分数的连续记法"(见《中算家的分数论》，中算史论丛，第一集，第28页)，这与刘徽注不合。平分术徽注有云："若然则重有分，故反以列数乘同齐"。显然，这里所说的"重有分"，即是"法实俱有分"，而决不是分数的连续记法。

在《九章》中，整数(称为"全")被看作是分数的特例。经分术徽注云："分母乘全内子。乘全则散为积分，积分则与分子相通，故可令相从"。这里说的是带分数化假分数的法则，它是除法过程的还原。"分母乘全内子"("内"通"纳"，纳入之意)，就是用分母乘整数部分再加入分子。其所谓"积分"，就是由整数通分而成的分数，其分子是分母与整数部分之积，故曰"积分"。由此可见，在中算家的分数论中，是把整数作为特殊形式的分数，那么，分数自然成了整数的扩充。

三　数量间的"相与通同"与齐同术

古代中算家已经有了数的分类的思想。这里所谓的同类数，是指用同一度量单位(法)所得的量数。①自然，只有同类数才能用以比较量的大小和相从相消(相加相减)。《九章》合分术徽注曰："方以类聚，物以群分。数同类者无远，数异类者无近。远而通体者，虽异位而相从也；近而殊形者，虽同列而相违也"。这段话正是说明同类数才能比较和加减的道理。从分数的原始意义来看，分母是"法"的标志，自然把同分母分数划归一类。所以徽注曰："同者，相与通同共一母也。"刘徽将凡能构成比的数(即"率")叫做彼此相"通"的，("率者，自相与通"。)；同类数可以相比，因而也是相通的。其所谓"相与通同"，是说分数的分母相同，(因而同类)其子则相通，即同分母分数之比等于其分子之比：

$$\frac{b}{a} : \frac{c}{a} = b : c$$

故称为"相与通"。对于分数而言，母同则子通，故将化异分母为

---

① 在正负术中，刘徽将数的同名异名(同号异号)作为数的分类的根据。参见本书，《<九章算术>与刘徽注中的"方程"理论》一文。

同分母的分数运算称为通分。

齐同术最初是一种通分的方法。刘徽注云："众分错杂，非细不会。乘而散之，所以通之。通之则可并也。凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。同者，相与通同共一母也。齐者，子与母齐，势不可失本数也"。这里指出，通分法则的理论依据是分数的变形规则"乘而散之"；通分的运算包括齐与同两个方面："同"，就是求公分母，"齐"，就是使分子与分母扩大相同的倍数。"母同、子齐"是齐同术不可偏倚的两个方面，"同"是为了分数相通；"齐"是保证分数"形变而值不变"（"势不可失本数"）。所以，在这里齐同术即是为了通分，分数在保持其值不变条件下的变形规则。

关于分数"齐同"的具体方法，在《九章》本文及徽注中共举出三种：

(1) "群母相乘为同，母互乘子为齐。"（见合分术与减分术）。

(2) "(群母相乘为同)，令母除同为率，率乘子为齐"。（见合分术徽注所谓"其一术者"。）即是，例如欲通分$\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_2}{a_2}$，…，$\frac{b_n}{a_n}$

令 $A=a_1\cdot a_2\cdots a_n$；$k_i=\frac{A}{a_i}$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则用 k_i 乘第 i 个分数之分子分母，则得

$$\frac{b_i}{a_i}=\frac{b_i\times k_i}{a_i\times k_i}=\frac{b_ik_i}{A}(i=1,2,\cdots,n)$$

从而完成了通分。

(3) "最下分母为同：以最下分母乘子，再令母除为齐"。（此见于少广术）即将(2)中的A改为最小公分母A^*。

比较这三种方法，少广术用最小公分母代替诸分母之积，可以说是齐同术的改进。

齐同术更一般的意义是，为使数量相通，率之全体在“不失本率”条件下的变形规则①。分数被定义为法与实之比，因而分数的通分乃是比率齐同的特例。正因为如此，刘徽注中又用比率齐同来解释分数运算的法则。《九章》乘分术徽注有云：“设有问者曰：马二十匹，直金十二斤。今卖马二十匹，三十五人分之，人得几何？答曰：三十五分斤之十二。其为之也，当如经分术，以十二金斤为实，三十五人为法。设更言马五匹，直金三斤。今卖四匹，七人分之，人得几何？人得三十五分斤之十二。其为之也，当齐其金人之数，皆合初问入于经分矣。然则分子相乘为实者，犹齐其金也。母相乘为法者，犹齐其人也。同其母为二十，马无事于同，但欲求齐而已。”这里，刘徽通过实例来说明比率齐同的意义。是说：

若　　　　　　　　金:马＝12:20；

　　　　　　　　　马:人＝20:35；

则　　　　　　　　金:人＝12:35。

这时金、人之数 12 与 35 构成比率，因而是相“通”的。

若另设　　　　　　金:马＝3:5；

　　　　　　　　　马:人＝4:7。

这时金、人之数 3 与 7 不能构成比率，故不相通。其原因在于马之二率 5 与 4 不相同。为使金、人之数相通，必须同其马率；又为保持比值不变，必须齐其金、人之率。即

金:马＝3:5＝(3×4):(5×4)＝12:20；

马:人＝4:7＝(4×5):(7×5)＝20:35。

于是“齐同以通之”，得

金:人＝12:35。

齐同术是化异类为同类，变相违为相通的数量变形法则。徽

---

① 关于齐同术的一般概念，参看本书《〈九章算术〉中的比率理论》一文。

注云："然则齐同之术要矣，错综度数，动之斯谐，其犹佩觿解结，①无往而不理焉。乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此算之纲纪乎。"刘徽把齐同术譬喻为解结之佩觿，这是很恰当的。如果没有齐同术这一工具，异分母分数便永远无法相通，那末分数运算只能象古代埃及人那样，沿着单分数表示法的道路而走向绝境。

四 分数四则的意义及其法则的由来

《九章》方田章称分数的加法为"合分"，分数的减法为"减分"其法则是

合分术："母互乘子，并以为实，母相乘为法，实如法而一。"

减分术："母互乘子，以少减多，余为实，母相乘为法，实如法而一。"

据同类数方可相从相消，此二法则均先由齐同术化异类为同类，其推导过程可表示如下：

$$\underbrace{\frac{b}{a}\pm\frac{d}{c}}_{\text{异类}}\xrightarrow{\text{齐同}}\underbrace{\frac{bc}{ac}\pm\frac{ad}{ac}}_{\text{同类}}\xrightarrow{\text{相从(相消)}}\frac{bc\pm ad}{ac}。$$

化带分数为假分数，称为"通分内子"。"内子"即"纳子"，是把分子纳入之意。它是合分术之特例，其法则是"分母乘全内子"，即

$$a+\frac{d}{c}\xrightarrow{\text{分母乘全}}\underset{\text{(积分)}}{\frac{ac}{c}}+\frac{d}{c}\xrightarrow{\text{内子}}\frac{ac+d}{c}。$$

这里的"分母乘全"，实际上是齐同之术。

《九章》称比较分数大小的法则为"课分术"，其法则与减分术

① 佩觿(xī)，古代解结的工具，用象骨制成，形如锥。

无异，仅在于意义之不同。此外，«九章»还给出求几个已知分数的平均值的法则，称为“平分术”。其推导过程亦是先用齐同术通分，将问题化归为求分子的平均数。

«九章»把分数的除法叫做“经分”。①其术文曰：“以人数为法，钱数为实，实如法而一。有分者通之，重有分者同而通之。”其意是说，分数相除与整数相除的意义相同，同样看作法与实的比。在法、实有分的情形则可用“散分”之术，化分数比为整数比。因而，分数相除实为通分。兹以方田章第[十八]问，求$(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4})\div 3\frac{1}{3}$，为例与徽注对照说明。

徽注原文	[十八]问细草
母互乘子者齐其子，母相乘者同其母。	$6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\overset{齐同}{\Longrightarrow}6\frac{4}{12}+\frac{9}{12}$.
以母通之者，分母乘全内子。乘全则散为积分，积分则与分子相通，故可可令相从。	$6\frac{4}{12}+\frac{9}{12}\overset{乘全内子}{\Longrightarrow}\frac{6\times12+4+9}{12}$ $\overset{相从}{\Longrightarrow}\frac{85}{12}$; $3\frac{1}{3}\overset{乘全内子}{\Longrightarrow}\frac{3\times3+1}{3}$ $\overset{相从}{\Longrightarrow}\frac{10}{3}$
凡数相与者谓之率。……故散分者，必令两分母相乘法实。	$\frac{85}{12}:\frac{10}{3}\overset{散分}{\Longrightarrow}(85\times3):(10\times12)$ $=\frac{255}{120}=\frac{17}{8}$ $=2\frac{1}{8}$.

① 李淳风注“以人数分所分，故曰经分”。人与所分之物皆为整数或分数。可见“经分”是泛指除法(而不限于分数相除)。这由乘分术徽注亦可看出。

如此说来，在化带分数为假分数之后，分数相除乃是化分数比为整数比的“散分”，即

$$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}:\frac{d}{c}\xrightarrow{\text{散分}}\left(\frac{b}{a}\times ac\right):\left(\frac{d}{c}\times ac\right)$$
$$=bc:ad=\frac{bc}{ad}.$$

刘徽注更由此概括出分数除法的具体法则：“又以法分母乘实，实分母乘法。此谓法实俱有分，故令分母各乘全内子，又令分母互乘上下”。是说法与实均为分数的除法，先将法、实皆化为带分数，然后再以法的分母乘实的分子为实（分子），实的分母乘法的分子为法（分母）。这与现代分数除法“将除数的分子、分母颠倒而与被除数相乘”的法则是一致的。

分数的乘法在《九章》中称为“乘分”。术曰：“母相乘为法，子相乘为实，实如法而一”。与现代分数乘法法则完全一样。

刘徽由分数的意义及乘除运算的性质来说明这一法则的来由：“凡实不满法者而有母子之名，若有分以乘其实而长之，则亦满法而为全耳。又以子有所乘，故母当报除，因令母相乘而连除也。”这段注文的意思，即是下面的推演过程：

$$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\left[\left(\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}\right)\times ac\right]\div ac$$
$$=\left[\left(\frac{b}{a}\times a\right)\times\left(\frac{d}{c}\times c\right)\right]\div ac$$
$$=bd\div ac$$
$$=\frac{bd}{ac}.$$

刘徽注文中还用比率的齐同来解释乘分法则。以例说明，如“马五匹，直金三斤，今卖四匹，七人分之，人得几何”？用比率方法计算：金:马＝3:5；马:人＝4:7；齐同之，则金:马＝12:20，

马:人＝20:35。故得一人所得之金＝金:人＝12:35＝$\frac{12}{35}$。

若改用分数计算：一匹马值金$\frac{3}{5}$斤；一人卖马$\frac{4}{7}$匹，则一人所得之金应为$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}$。对照上面的比率算法，则有

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}\overset{\text{齐同}}{=\!=}\frac{3\times4}{5\times4}\times\frac{5\times4}{5\times7}\overset{\text{通之}}{=\!=}\frac{3\times4}{5\times7}.$$

一般地，分数相乘即

$$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}\overset{\text{齐同}}{=\!=}\frac{bd}{ad}\times\frac{ad}{ac}\overset{\text{通之}}{=\!=}\frac{bd}{ac},$$

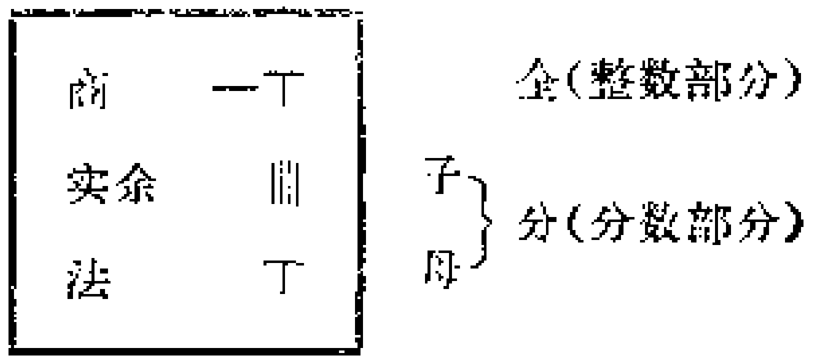
因而乘分实质上仍是比率的齐同。

总而言之，在中算家的分数论中，各种分数算法最终都归结为约分、散分和齐同(通分)，换句话说，分数四则算法是由分数基本性质推导出来的，而不只是经验的归纳。

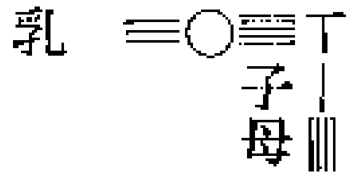
五　筹算中的分数表示法和运算制度

我国古代包括分数在内的一切运算都是以筹为工具。《九章》中未有关于筹算制度的记载，这大概是因为它不是一部算术启蒙读本的缘故。

从《孙子算经》关于筹算除法的记叙中可以推测分数的筹算形式。《孙子》卷上有云："凡除之法，……除得在上方。假令六为法，百为实。以六除百，当进之二等，令在正百下，……。实有余者，以法命之，以法为母，实余为子"。可见在筹算除法中，实数置于中格，法数于下格，所得之商置于上格。例如，100÷6＝＝16$\frac{4}{6}$，筹算除法最后得出的结果列如下图。这便自然得到一个分子在上，分母在下的分数表示法，连除得整数部分在内，便是一个带分数。但分数的这种记法，直到宋代秦九韶的《数书九章》中



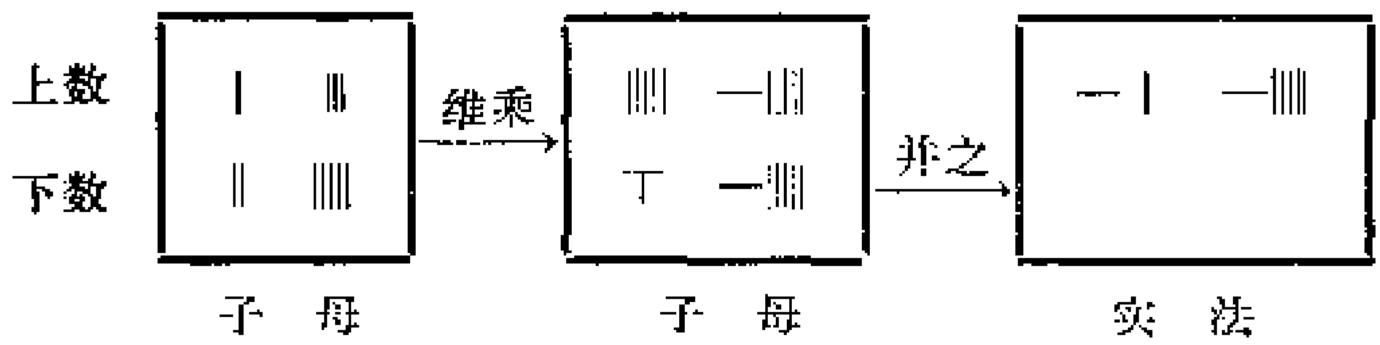
才有记载的例子。如将乳香3056$\frac{1}{4}$斤写成



但是，在古代筹算中，分数的表示法并不固定为一种形式。在《孙子算经》卷中的几问，记叙便不一样。例如，

第[一]问："今有一十八分之一十二，问约之得几何?"术曰："置十八分在下，一十二分在上。①副置二位，以少减多，等数得六。为法约之，即得"。可见在约分时，"母在下，子在上"。

第[二]问："今有三分之一，五分之二，问合之得几何?"术曰："置三分、五分在右方，之一、之二在左方。母互乘子，五分之二得六，三分之一得五。并之，得一十一为实。右方二母相乘得一十五，为法。不满法，以法命之，即得。"即，其运算过程如图：

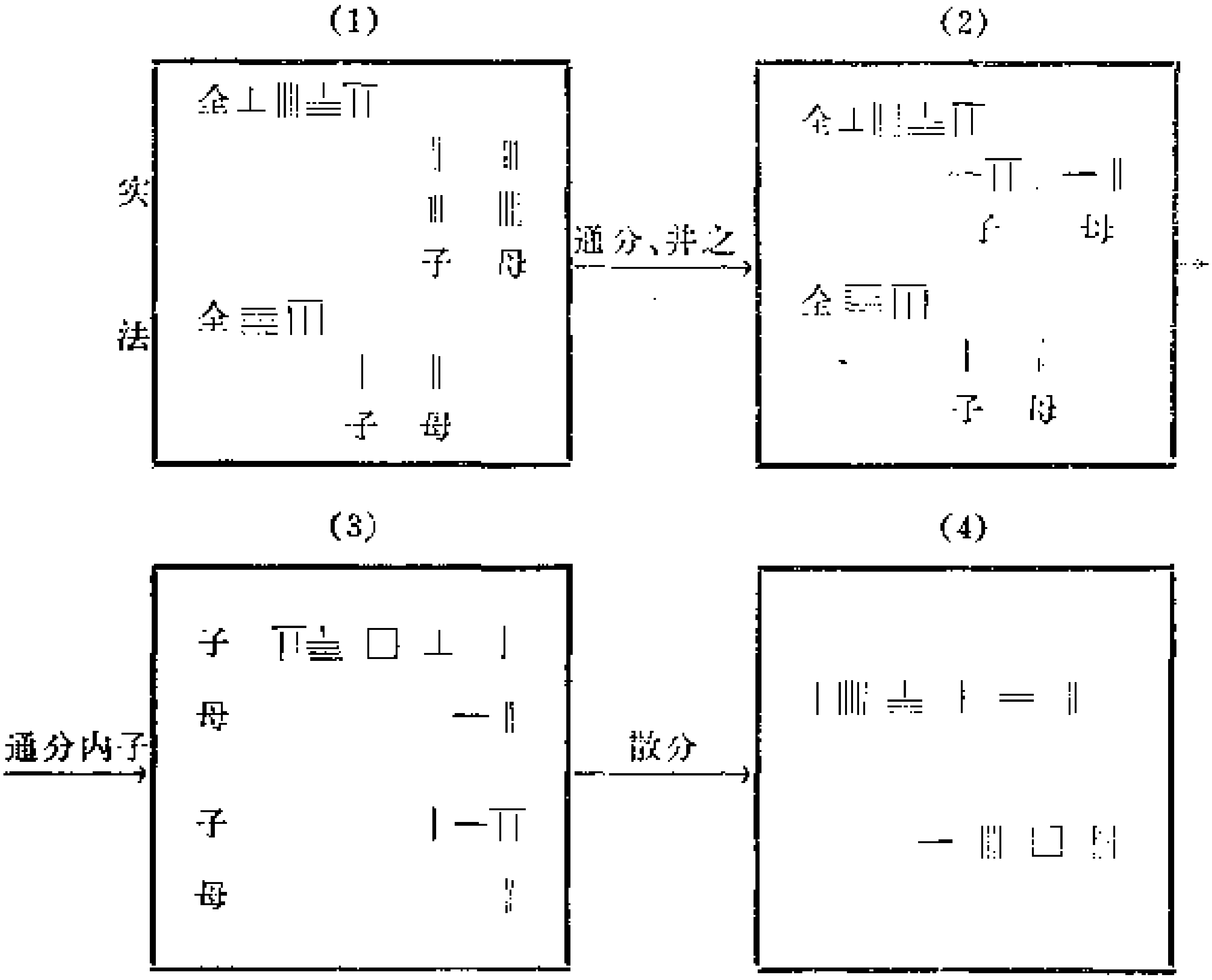


可见在合分中，分数的表示为"母在右，子在左"。由术文可见减分、平分、课分中，分数表示皆如此。

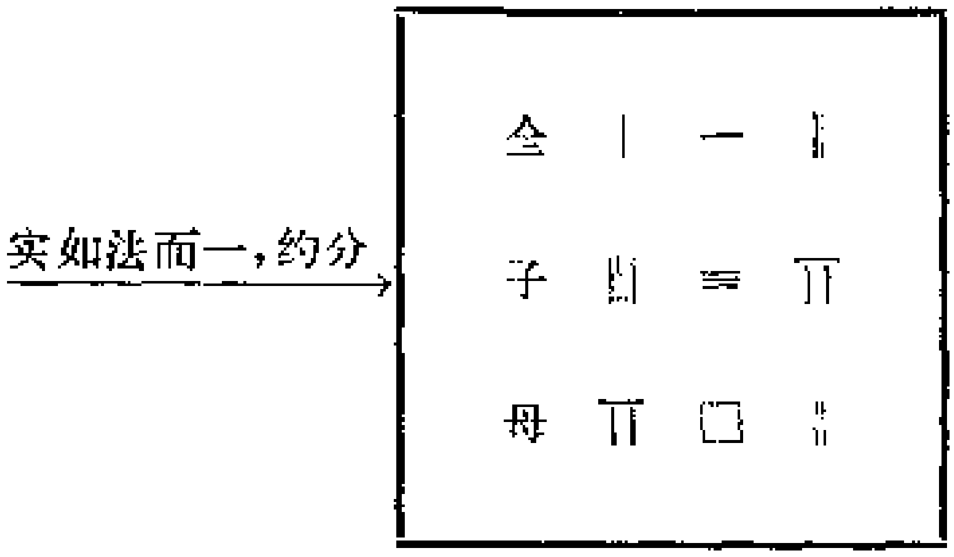
---

① "一十二分"应校改为"之一十二"。

在《张丘建算经》中，同一个题目的计算过程里，分数的表示法也不一致。例如，卷上第[六]问："以五十八、二分之一除六千五百八十七、三分之二、四分之三。问得几何？"术曰："置六千五百八十七于上。又别置三分于下右，之二于左。又置四分于三下，之三于左。维乘之，分母得十二，子得一十七。以分母除子得一，余五。加一上位，得六千五百八十八。以分母十二乘之，内子五，得七万九千六十一。又以除数分母二因之，得一十五万八千一百二十二。又置除数五十八于下。以二因之，内子一，得一百一十七。又以乘数分母十二乘之，得一千四百四为法。以除实得一百一十二。法与余俱半之，得七百二分之四百三十七"。按术文，$\left(6587\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 58\frac{1}{2}$，其演算过程如下图：



(5)

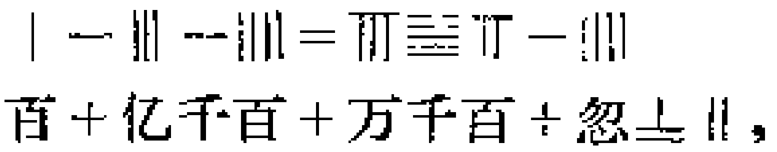


可见在(1)、(2)中，分数表为"母在右，子在左"，而在(3)、(5)中则"母在下，子在上"。

元代刘瑾所著《律吕成书》中，将

$$1\ 1\ 3\ 1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7\ 1\ 4\frac{2}{7}$$

写成



这里将分数写在下格，而"母在左，子在右"。

古代分数表示法无固定形式，这正反映出我国古代的分数概念实质上是构成比率的"数对"，其母与子较现在具有更大的独立性。李约瑟曾注意到，"在《九章》中，分子和分母在运算前称作子和母，在运算中则称作实和法"。①这种情形说明古代的分数运算首先把分数还原为一对法和实，分数运算便成了"法实相推"。其所以这样做，从概念上说，母与子是密不可分的，而法与实则可相互独立。正因为如此，我国古代分数记法有的不列分母，叫做"不著母"。在筹算中分数表示法的这种多样性与灵活性，无疑是大大地简化了运筹的过程。

---

① 见李约瑟《中国科学技术史》，第三卷，十九章七节。

六　我国古代分数论之特色及其影响

分析中算家的分数理论，实际上是把分数定义为具有下述基本性质的数对$\binom{b}{a}$或(ba)：

对于任意的数c（$c\neq 0$）有

$$\binom{b\times c}{a\times c}=\binom{b}{a}\text{和}\binom{b\div c}{a\div c}=\binom{b}{a},$$

且规定

$$b=\binom{b}{1}.$$

由此引导出分数的保值变形规则：

约分：$\binom{bc}{ac}=\binom{b}{a}$；

散分：$\binom{b}{a}=\binom{bc}{ac}$；

齐同(通分)：$\binom{b_i}{a_i}=\binom{b_ik_i}{A}$，其中$A=\prod_{i=1}^{n}a_i$，$k_i=\dfrac{A}{a_i}$，$(i=1,2,\cdots,n)$。

而分数四则运算的规定，则由上述保值变形规则和假定分数仍保存自然数的四则运算性质而导出。即

分数加减：$\binom{b}{a}\pm\binom{d}{c}=\binom{bc}{ac}\pm\binom{ad}{ac}=\binom{bc\pm ad}{ac}$；

分数乘法：$\binom{b}{a}\times\binom{d}{c}=\binom{bd}{ad}\times\binom{ad}{ac}=\binom{bd}{ac}$，特别地，规定$c\times\binom{b}{a}=\binom{c}{1}\times\binom{b}{a}=\binom{cb}{a}$；

分数除法：$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \div \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \times ac \\ \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \times ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ad \end{pmatrix}.$$

从刘徽关于分数运算法则的注释中明显可见，中算家在建立分数算法时，是把分数作为自然数的扩充，要求其保持整数四则的基本运算律。因此，在《九章》中明确记叙而为刘徽注文所阐发的我国古代分数理论，已经达到接近于近代的成熟程度。但是，中算家的分数论具有自己独特的风格，它表现在以下几个方面：

(1) 中国古代的分数概念等同于子与母(实与法)之比，因而分数理论与比率理论相通，二者相互渗透：分数论是一般比率理论的先导；比率论则是分数论的理论依据。

(2) 在中算家的分数运算中，分子与分母被还原为一对实与法，它们被当作彼此独立的数而分别进行运算，不必将它们列在一起。这样便带来了分数表示法的多样性与运算的灵活性。

(3) 我国古代分数算法是以筹算的形式进行的。古代筹算制度无运算符号和等号，运算表现为筹式的变换。分数算法实际上是通过一系列筹式的变形，特别是约分、散分、齐同之类的“保值变形”来实现的。

中算家的分数论无疑是对世界数学科学发展的重大贡献。印度人七世纪的分数算法是将中国的筹算法则改成笔算。后来阿拉伯人大约在十二世纪引进了分数线，才使分数的表示法固定下来。而西方的分数算法是在十五世纪中普遍采用阿拉伯算术后才有所发展。

古代的分数算法是我国古算理论发展的重要基础。一方面，沿此发展下去我国古代数学家创造了小数、正负数以及无限逼近任一实数的方法，因而实质上达到实数系的完成；另一方面，在分数论基础上发展起来的一般比率理论，在我国古算理论中占有极为重要的地位，成为盈不足术、方程论等重要理论的源泉。《九章算术》把分数算法列在全书之首，正在于突出它的这种地位与作用。

参 考 文 献

[1] 李俨，《中算家的分数论》，《中算史论丛》，第一集，1954，第15—43页。

[2] 钱宝琮，《中国古代分数算法的发展》，《初等数学史》，科学技术出版社。1959，第68—71页。

[3] 钱宝琮主编，《中国数学史》，科学出版社。1964，第34—37页。

[4] 许莼舫，《中国算术故事》，中国青年出版社，1952。第33—37页。

[5] 严敦杰，《中国古代数学的成就》，中华全国科学技术普及协会，1956。

[6] 李约瑟，《中国科学技术史》，卷三。

[7] 三上义夫著，林科棠译，《中国算学之特色》，商务印书馆，1933。

[8] Mikami, Y. 'Arithmetic With Fractions in Old China'. AMN, 1911, 32, №.3.

[9] A. П. Юшкевич,《记数制度溯源》，《初等数学全书》，第一册。

[10] D. J. 斯特洛伊克著，关娴译，《数学简史》，科学出版社，1956。

[11] M. 克莱因著，张理京等译，《古今数学思想》，第一册，上海科技出版社，1979。

[12] 郭沫若，《甲骨文字研究》，科学出版社。

[13] 朱德熙、裘锡圭，《战国时代的"料"和秦汉时期的"半"》，《文史》，第八辑。中华书局，1980。

[14] 马国权，《两周铜器铭文数词量词初探》，《古文字研究》，第一辑，中华书局，1979。

[15] 《睡虎地秦墓竹简》，文物出版社，1978。

更相减损术源流

沈 康 身

《九章算术》方田章第6题：“有九十一分之四十九，问约之得几何？答曰：十三分之七。”术曰：“可半者半之，不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。”这是《九章算术》对约分方法的总结。本文探讨原来只用以求“等数”、便于约分的“更相减损”术在我国、在日本曾多方面得到应用，作为研究和解决某些问题的专用工具。

一 国内发展

1．最大公约数 经过更相减损运算后出现的等数，就是所求二数的最大公约数。上面引的术文：“以少(b)减多(a)，更相减损“就是指当$a>b$，从a逐次减去b，直到余数$r_1<b$为止；然后又从b逐次减去r_1，直到第二次余数$r_2<r_1$为止；依次更相减损，直到前后两次余数相等，这个等数就是所求的最大公约数①。

刘徽注《九章算术》至此，对更相减损术作出辞简意赅的证明：“等数约之，即除也。其所以相减者，皆等数之重迭，故以等数约之。”我们记：

---

① 参考文献[2]第5页说：“辗转相除法，此亦名为Euclid算法。我国秦九韶于《数学九章》(1247)中亦论及之。”我国对此算法之记载可提早到《九章算术》成书年代，即公元元年前后，然而更相减损术与Euclid辗转相除法是有区别的，说见参考文献[4]。

$$r_1=a-bq_1(b>r_1>0)，其中(a,b)=(r_1,b)①，$$

可见 r_1 是等数(a,b)的倍数，就是刘徽所说："等数之重迭"。一再更相减损，余数变小，无非是减少等数重迭的次数：

$$r_2=b-r_1q_2(r_1>r_2>0),$$
$$r_3=r_1-r_2q_3(r_2>r_3>0),$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_{n-1}=r_{n-3}-r_{n-2}\ q_{n-1}(r_{n-2}>r_{n-1}>0),$$
$$r_n=r_{n-2}-r_{n-1}\ q_n(r_{n-1}>r_n>0).$$

当出现前后两次余数相等，例如 $r_{n-2}=r_{n-1}$，则

$$r_{n-1}=(r_{n-1},\ r_{n-2})=(r_{n-2},\ r_{n-3})=\cdots\cdots=$$
$$=(r_2,\ r_1)=(r_1,\ b)=(a,\ b).$$

求最大公约数从更相减损后来发展为辗转相除，成为人们从小学开始就熟知的方法，但是更相减损术仍然有其优点。例如求1008，1260，882，1134四个数的最大公约数，可以不拘次序地挑选最方便的，从较大数减去较小的数。一再减损，最后如果能出现全部相等的差数(等数)，那么这差数就是四数的最大公约数。例如上述四数的最大公约数（1008，1260，882，1134）=(1008－882，1260－1134，882，1134—882)=(126，126，882－6×126，252－126)=(126，126，126，126)②这种做法是刘徽"其所以相减者，皆等数之重迭"学说的推广，这种方法比分解素因数或逐次两两求最大公约数要简便得多③。

---

① 本文用$(a, b, \cdots)$，$[a, b, \cdots]$分别表示自然数a，b，$\cdots$的最大公约数与最小公倍数。

② 在参考文献[3]自序中，张德馨说，这种方法是他在德国柏林大学数学系听 I.Schür 博士数论课时学来的。

③ 陈景润，初等数论(Ⅰ)，1978，第12页载同一题，用分解素因数法。又同书第14页至第16页介绍用两两辗转相除求三个以上自然数的最大公约数，繁简可以比较。

2．最小公倍数 《九章算术》少广章第1至第12题涉及分数求和问题。在术文中已有取最小公倍数作为公分母的记录；但是也有例外，其中第12题就取[2，3，…，12]=83160。唐代天文学家李淳风（？—714）在注释中指出："凡为术之意，约省为善……，宜云二万七千七百二十。"然而《九章算术》及其注释者都没有论述最小公倍数的一般求法。

《孙子算经》有通过等数来求最小公倍数的痕迹。卷下第35题："今有三女，长女五日一归，中女四日一归，少女三日一归。问三女几何日相会。"答数是60日。术文是："置长女五日、中女四日、少女三日于右方，各列一算于左方，维乘之。各得所到数。长女十二到，中女十五到，少女二十到。又各以归日乘到数。"从术文我们可以推测算经作者先考虑：

① 多少天后中女、少女有第二次聚会，再考虑：② 多少天后长、中、少女三人有第二次聚会。

由于(3，4)=1，关于①我们知道

$$[3,4]=\frac{3\times4}{(3,4)}=12，关于②$$

$$[3,4,5]=[[3,4],5]=[12,5]=\frac{12\times5}{(12,5)}=3\times4\times5.$$

正如算经作者在术文中所说，当少女、中女在第五次聚会，即长女回家第十二次（十二到）时，三人才有第二次聚会。计及术文所拟另外两个解答方案，算经作者可能理解求最小公倍数的一般规则，即

$$① \ [a,b]=\frac{ab}{(a,b)}$$

$$② \ [a,b,c]=[[a,b],c]=\left[\frac{ab}{(a,b)},c\right].$$

《张邱建算经》记有通过等数求几个分数的"最小公倍数"，即

求一最小数（既约分数）使同时能被这几个分数整除。卷上第10题："今有封山周栈[1]三百二十五里，甲、乙、丙三人同绕周栈行，甲日行一百五十里，乙日行一百二十里，丙日行九十里。问周行几何日会。"答数是$10\frac{5}{6}$日，术文是："置甲、乙、丙行里数，求等数为法，以周栈里数为实，实如法而一。"

从题意知道甲、乙、丙三人绕山一周所需时间分别是

$$\frac{325}{150},\ \frac{325}{120},\ \frac{325}{90}$$

天，从同地出发后，三人第二次相遇所需时间应是同时被这三个分数整除的最小数，我们记为既约分数$\frac{a}{b}$，那么就要求

$$\frac{150\,a}{325\,b},\ \frac{120\,a}{325\,b},\ \frac{90\,a}{325\,b}$$

都是整数，而且要求a、b分别是最小、最大的自然数。算经作者说："取周栈里数（$a=325=[325,325,325]$）为实，甲、乙、丙里数求等数（$b=30=(150,120,90)$）为法。借此我们可以得出一般规则：记同时能被分数$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，…整除的最小数为$\left[\frac{a}{b},\frac{c}{d},\cdots\right]$那么

$$\left[\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}\right]=\frac{[a,c]}{(a,c)},$$

$$\left[\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f}\right]=\frac{[a,c,e]}{(b,d,f)},\ \cdots\cdots$$

3．最佳渐近分数 我们知道连分数的分母是逐次把余数颠倒相除求商数得来，这一运算恰恰是更相减损术运算流程中的中

---

① 周栈，挑出山边的环山道路，亦称栈道。

间结果①，每次减损的次数就是所需的商数。用连分数截尾获得的近似分数都是最佳渐近分数。我国著名数学家祖冲之(429—500)指出："以圆径一亿为丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈、朒二限之间。密率、圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率、圆径七，周二十二。"祖冲之圆周率精度保持世界记录千年以上，他用什么办法从盈朒二数(小数)求出约率、密率(都是最佳渐近分数)？历来为国内外人士关注，英国李约瑟在[8]中引钱宝琮的话说："密率的分数是一个连分数渐近数，因此是一个非凡成就。"我们认为更相减损术既远在《九章算术》成书年代已流行，这应是祖冲之熟悉的运算方法，他继承刘徽割圆术用几何计算求出圆周率盈朒二数后，取平均，以更相减损术为工具获取连分数所需商数是很可能的，这就是：

$$3.14159265=3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{288}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4},$$

经过逐项截尾，前面五个最佳渐近分数是：

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{102573}{32650}.$$

其中第二、第四个分别是约率和密率。

4．一次同余式 《孙子算经》卷下第26题："今有物，不知其数。三三数之，剩二；五五数之，剩三；七七数之，剩二。问物几何"答数是23。术文是："三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十。并之。置二百三十三，以二百一十减之，即得。"算经作者提出的虽是特殊问题，

---

① 参考文献[2]第266页说："连分数之计算与辗转相除法有貌异实同之妙"。

但具有一般意义，从题文及术文可知对同余式组

$$\begin{cases} x\equiv r_1 \pmod{m_1} \\ x\equiv r_2 \pmod{m_2} \\ x\equiv r_3 \pmod{m_3} \end{cases}$$

只要找到辅助系数 F_1，F_2，F_3 使分别满足同余式

$$F_1m_2m_3\equiv 1 \pmod{m_1}$$
$$F_2m_1m_3\equiv 1 \pmod{m_2}$$
$$F_3m_1m_2\equiv 1 \pmod{m_3}$$

那么所求同余式组的解就是

$$x\equiv r_1F_1m_2m_3+r_2F_2m_1m_3+r_3F_3m_1m_2 \pmod{m_1m_2m_3}.$$

在我国数学史上问题还作两方面推广：一方面是同余式个数增多，另一方面是模 m_1，m_2，m_3，…并不一定两两互素。但无论如何最后总得归结为求上述辅助系数，也就是解同余式

$$ax\equiv 1 \pmod{b} \quad (a>b \text{ 或 } a<b) \qquad (1)$$

本文着重阐述在我国数学史上解同余式(1)与更相减损术的关系。

«孙子算经»物不知数题的系统研究是从南宋秦九韶开始的，在他的著作«数学九章»中第1、2两卷有专题讨论，其中"大衍总术"论述(1)式解法，称(1)式中的模 b 为定数，x 的系数 a 为衍数，所求数 x（辅助系数）为乘率。秦九韶所创解(1)式的算法——大衍求一术是："置衍(数)右上，定(数)居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数，与左上一相生，入左下，然后乃以右行上下，以少除多，递互除之，所得商数，随即递互累乘，归左行上下，须使右上末后奇一而止。乃验左上所得，以为乘率。"借此，秦九韶用以解决卷1、2所设九题，而这些题在同余式个数上，模与模之间的两两并不互素的关系上都有所推广。然而秦九韶求乘率算法具体图式未见露布，素为数学界关切。

张敦仁(1754—1834)著《求一算术》(1803年出版)解释秦九韶算法。在其序言中先定义求一术："求一术出于孙子算经……，其法以各数及不满各数之残(余数)，求未以各数除去之数，必先求以各数去之余一之数，而后诸数可求，故曰求一。"序言中还说明成书经过："求一术仅见于宋秦九韶数书九章中……，五百年来无有知其说者矣。元和(苏州)李锐笃好斯学，因共日夕讨论，研究秘奥，……以究其源。"书分三卷，全书突出求一术与更相减损术(作为前者之源)的密切关系，所以上卷先设求等数题四则，要用求等数解决的约分题九则，用求等数化并不两两互素模为两两互素模的题八则。有了这些充分准备后，就用更相减损术诠释乘率求法："列少数(a)于上，多数(b)于下(按即$a<b$)，以上除下，所得为第一数(q_1)，有余(r_1)。复以下(r_1)除上(a)，所得为第二数(q_2)。如果上下相除，所得，以次命之，如第三数(q_3)、第四数(q_4)之类……，上位余一而止(按即$r_n=1$)，不除。乃列各得数于左行，立天元一为右行第一数，以左行第一数乘之，得右行第二数。复置右行第二数，以左行第二数乘之，加入右行第一数，得右行第三数。每置右行数与左行相当之数乘之，以右行上位加之，得右行以位，其右行最后得数，即乘率也。"上面文字叙述，我们用图式表示如下：

图式 1

$a<b$

q_2	q_4		q_n	
$a-r_1q_2$	$r_2-r_3q_4$	$r_4\cdots$	$r_{n-2}-r_{n-1}q_n$	$r_n=1$
$b-aq_1$	$r_1-r_2q_3$	$r_3\cdots$	$r_{n-3}-r_{n-2}q_{n-1}$	r_{n-1}
q_1	q_3		q_{n-1}	

图式 2

左　行	右　行
q_1	1
q_2	q_1
q_3	q_2q_1+1
q_4	$q_3(q_2q_1+1)+q_1$
q_5	$q_4(q_3(q_2q_1+1)+q_1)+q_2q_1+1$
⋮	⋮

可见图式 1 中各数都从更相减损术获得，所得数再用图式 2 所示程序最终获取所需乘率。

在《求一算术》出版后七十一年，黄宗宪著《求一术通解》(1874 年出版)改进张的工作：① 解同余式(1)不限于 $a<b$，② 合上下除(图式 1)，左右乘(图式 2)二项程序为一项。黄宗宪认为："列定母(b)于右行，列衍数(a)于左行，辗转累减（按即更相减损)，至衍数余一而止，视左角上寄数为乘率。"他为求寄数法列出三条规则：

① 定 a 的寄数为 1，b 的寄数为 0，把 a 的寄数作为 r_1 的寄数。(我们简记为 $J_0=0$，$J_1=1$)

② 做第二次减损，这次减损累减次数 q_2 作为 r_2 的寄数。(我们简记为 $J_2=q_2$)

③ 做第三次减损，得余数 r_3。第三次减损累减次数 q_3 与 r_2 寄数 q_2 的乘积加上 r_1 的寄数作为 r_3 的寄数，即 q_3q_2+1(我们简化为 $J_3=q_3J_2+J_1$)

依次类推，一般说：做第 m 次减损，得余数 r_m，r_m 的寄数等于第 m 次减损累减次数 q_m 与 r_{m-1} 寄数的乘积加上 r_{m-2} 的寄

数。(我们简记为 $J_m = q_m J_{m-1} + J_{m-2}$。这种手续一直进行到左行最后余数 $r_n = 1$ 为止，那时，r_n 的寄数就是所求的乘率。我们用图式表示如下*：

寄数			寄数
1	a	b	0
1	$\frac{-bq_1}{r_1}$	$\frac{-r_1q_2}{r_2}$	q_2
q_3q_2+1	$\frac{-r_2q_3}{r_3}$	$\frac{-r_3q_4}{r_4}$	$q_4(q_3q_2+1)+q_2$
$q_5(q_4(q_3q_2+1)+q_2)+q_3q_2+1$	$\frac{-r_4q_5}{r_5}$	⋮	
	⋮		
	$r_n=1$		

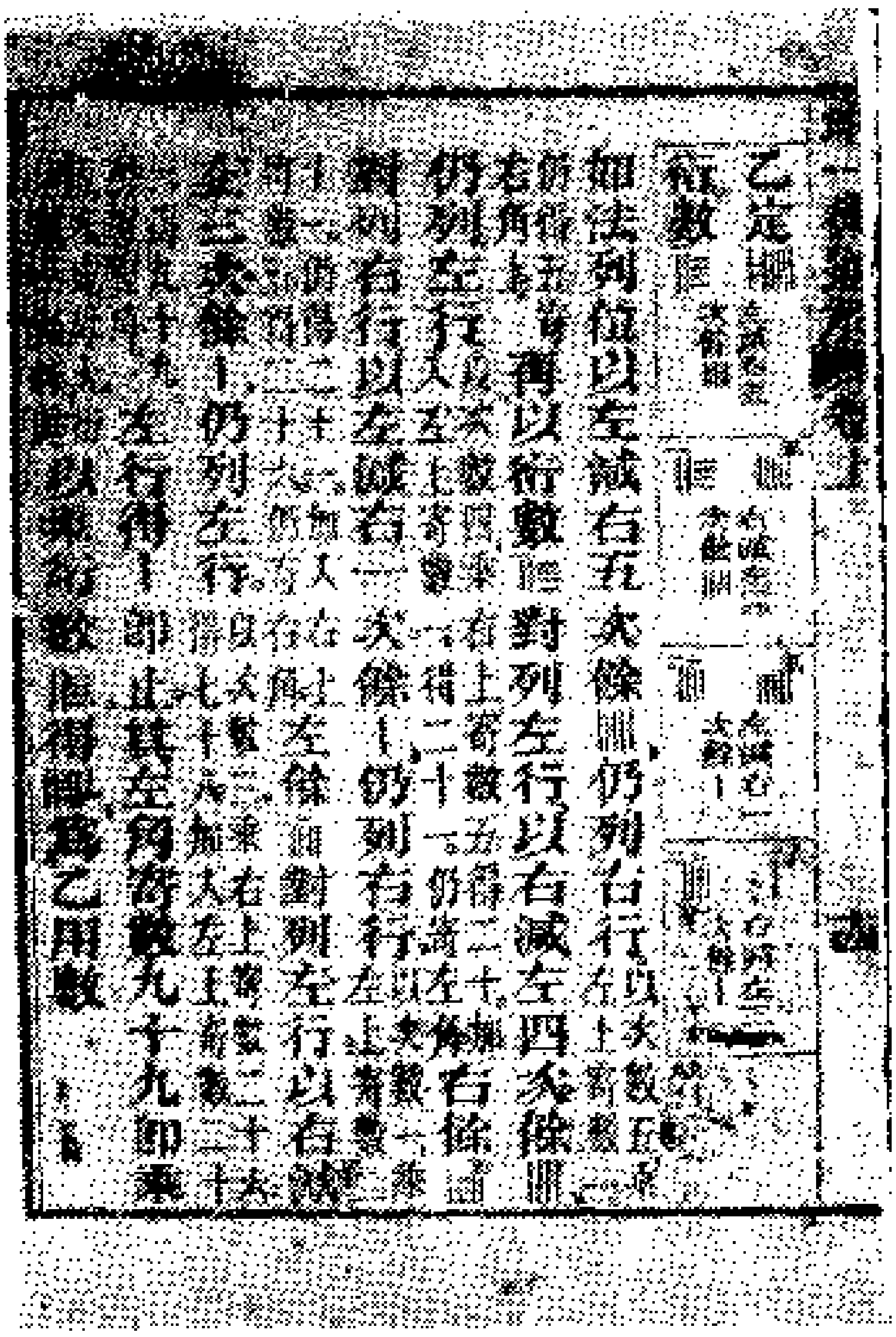
上述求乘率规则是正确的，在更相减损过程中，每次余数 $r_2, r_2 \cdots\cdots$，直到 $r_n = 1$，事实上都是 a 与 b 倍数之差，所谓寄数无非是在这些差数中被减数含有 a 的倍数，而减数则是 b 的倍数，以上列图式不难发现：

n	余　　数　　r_n	寄　　数　　J_n
1	$r_1 = a - bq_1$	$J_1 = 1$
3	$r_3 = r_1 - r_2q_3 = (q_3q_2+1)r_1 - q_3b$	$J_3 = q_3J_2 + J_1 = q_3q_2+1$
5	$r_5 = r_3 - r_4q_5 = (q_5(q_4(q_3q_2+1)+q_2)+q_3q_2+1)r_1 - (q_3+q_5)b$	$J_5 = q_5J_4 + J_3$
	……	……
n	$r_n = 1$	$J_n = q_nJ_{n-1} + J_{n-2}$

* 这一图式是在 $a>b$ 条件下进行的，如 $a<b$ 时，视 q_1 是 0，r_1 的寄数仍以 a 的寄数为寄数，即 $J_1=1$ 不变，其后程序也不变。

控制左行(衍数所在行)的余数 $r_n=1$，那么

$r_n=1=$乘率的 a 倍 $-b$ 的倍数，这就是乘率的 a 倍 $\equiv 1 \pmod{b}$，因此乘率是同余式(1)的解。



黄宗宪图式用字母表示的程序比较冗繁，然而施于具体数字却极为简便，《求一术通解》就以此犀利工具解决从《孙子算经》到杨辉、秦九韶以及新设各种同余式问题。

例 1. 《求一术通解》卷上第 14 页在解秦九韶(数学九章)卷 2 第 3 题程行计及题时，有解形如

$$24x\equiv 1 \pmod{125}$$

同余式，用黄宗宪图式解当如

$J_1\cdots\cdots 1$	24	125	$0\cdots J_0$
$+4\times5=20$	$-4\times5=20$	$-5\times24=120$	$+5\times1=5$
$J_3\cdots\cdots 21$	4	4	$5\cdots J_2$
$+3\times26=78$	$-3\times1=3$	$-1\times4=4$	$+1\times21=21$
$J_5\cdots\cdots 99$	1	1	$26\cdots J_4$

对照黄宗宪原作文、图，可见更相减损术在解同余式(1)中

的重要作用。

例 2. 这种算法图式至今有现实意义，如解同余式

$$256x \equiv 1 \ (mod\ 337)$$ ①

按黄宗宪图式就求得

J_1············1	256	337	0···J_0
$+3\times1=3$	$-3\times81=243$	$-1\times256=256$	$+1$
J_3············4	13	81	1···J_2
$+4\times25=100$	$-4\times3=12$	$-6\times13=78$	$+6\times4=24$
J_5··········104	1	3	25···J_4

$$x \equiv 104 \ (mod\ 337)$$

很迅速得到结果。

5. 一次不定方程 骆腾凤（1770—1841）把有关一次不定方程问题研究心得写成《艺游录》（1843 年出版），全书二十二个专题，分上、下二卷。卷上大衍求一术，使用张敦仁《求一算术》相同方法，并且用求一术解《张邱建算经》百鸡问题。他先化含有三个未知数的不定方程组

$$x+y+z=5x+3y+\frac{z}{3}=100$$

为二元一次不定方程，然后用求一术解同余式

$$2y \equiv 1 \ (mod\ 7).$$

时曰醇对百鸡问题有深入研究，著《百鸡术衍》（1861 年出版），共收一次不定方程二十八题，分上、下二卷，每题都分别

---

① 陈景润，初等数论（Ⅰ），1978。第 81 页解此题时列横式要用较多篇幅，而且列横式有赖于心算，对大数尤易出差错，黄宗宪图式随除随加、减，有规定程序，优越性是显然的。参考文献[9]第 309 页解释黄宗宪求乘率算法时，仍用张敦仁方法，未理解黄立术本意，也未能直接利用更相减损术以获取乘率。

用《九章算术》方程术及《数学九章》大衍求一术解。这二十八个题最后都归结为形如

$$ax+by=c$$

的不定方程，再按照同余式

$$ax\equiv c(mod\ \ b) \qquad (2)$$

求解。在我国把不定方程归结为同余式（2）问题，前后经过三十多年，理论才逐渐完备。清代学者互相讨论、互相问难，他们都分散各地①，在当时条件下，特别是时曰醇"晚年目已双瞽，犹能手按珠盘，口授其子，著百鸡术衍二卷，以张邱建百鸡一题，衍为大、中、小三色，……每题分立两法，一驭以方程，一驭以求一。"②这种精神是值得称道的。

二　东传日本

我国数学至迟在公元554年由百济易博士王道良，历博士王保孙传入日本③，以后日本就采用中国度量衡和天文历法制度，建学校、设算生、算博士并用我唐代编的《算经十书》为教科书。关于同余式问题，日本自著书籍最早在吉田光由《尘劫记》（1627年出版）卷下第43题有"七七数之，余二；五五数之，余一；三三数之，余二，求棋数"。答数是86，还录用与《孙子算经》类似术文，但未系统论述乘率求法。

1. 互约术　日本著名数学家关孝和（1642?—1708）深入研究同余式问题，在所著《括要算法》（1683年成稿，林钟重订）④

---

① 骆腾风江苏淮阴人、时曰醇江苏嘉定人、黄宗宪湖南新化人。

② 见华世芳《近代畴人著述记》(1884年出版)

③ 参考文献[6]第6页

④ 关孝和代表作之一，关氏殁后由门生整理出版，全书用汉文撰写。1974年收入平山谛主编的《关孝和全集》内，见参考文献[5]。

卷2有专题讨论。关孝和用更相减损术解同余式，互约术是其准备工作。所谓互约，与汉文同一名词有不同含义，是借助更相减损术求二数最小公倍数。互约术例："如今有六个、八个，问互约之，各几何。答六而三，八不约。（按即二者最小公倍数是3××8=24）术曰：六(a)与八(b)互减得等数二(c)，(按即$(a,b)=c$)以约六为三，三与八互减得等数一，(按即$(c,b)=1$)则不约而止$\left(\text{按即 }[a,b]=cb=\dfrac{ab}{(a,b)}\right)$。关孝和学生建部贤弘著«大成算经»设例介绍同时被分数$\frac{8}{9}$，$\frac{10}{21}$整除的既约分数，建部认为

$$\left[\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}\right]=\frac{[a,c]}{(b,d)}。$$

互约术还推广为逐约术，即用更相减损术求几个数的最小公倍数方法。举的例是求[105,112,126]，经过两两"互约"手续，最后得[105,112,126]=[15,112,126]=[5,16,63]。这是我«孙子算经»三女相会题余绪。进一步还解决求$[a,b,c,d]$。最终用更相减损术求同时为三个分数整除的既约分数，得

$$\left[\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f}\right]=\frac{[a,c,e]}{(b,d,f)}$$

这与我«张邱建算经»封山周栈题同义。

会田安明（18世纪下半叶人）在所著«算法交会术»（手抄本，未识年代）记有："周天三百六十五度四分度之一也。今有甲乙丙丁戊五星，共会于同度，其运旋如环无端，只云五星一日行各不齐，甲星二十八度一十六分度之一十三，乙星一十九度四分度之一，丙星一十三度一十二分度之五，丁星一十一度七分度之一，戊星二度九分度之七，几日而再会于同度乎？问其日数及各遍周天其回次度几何。"答数：再会日数368172日，期间甲乙丙丁戊五星分别行29043，19404，13524，11232，2800周。这

题当是我《张邱建算经》封山周栈题的进一步推广。

2. 零约术 关孝和在《括要算法》卷2创零约术，用我国调日法计算小数的渐近分数，从 $3<\pi<4$ 开始，通过一百十三次调日法，取得祖冲之密率。建部贤弘在《大成算经》对此有所发展："厌烦其术（按指关孝和调日法求密率）设本术以探求之"，从小数点后有二十四个有效数字的 π 近似值，用更相减损术先得到连分数形式

$$\pi \doteq 3+\frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{292+}\,\frac{19129335770520420}{30144353364053721}。$$

逐步舍去末尾，得圆周率前面五个最佳渐近分数为

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102}。$$

这是历史上用更相减损术求最佳渐近分数的著例。

3. 累约术 建部贤弘在《大成算经续录》中续创累约术，用更相减损术解决不等不定式问题，书中设问："假令以一千三百一十八个七三〇六累益之，以五万九千五百九十四个七七〇五累损之，损殚个数（按即使余数小于1而最接近于1），问强弱损益段几何。答曰：弱益段四千〇二十三，弱损段八十九，强益段五十五万〇〇六十五，强损段一万二千一百七十二。"事实上，这就是解不等式：

$$|1318.7306\,x-59594.7705\,y|<1 \qquad (3)$$

按照建部贤弘在《大成算经续录》原题详解，他运用更相减损术解决

1	1318.7306	59594.7705	0
	1259.4675	59342.8770	
$q_3=5$	$r_3=59.2631$	$r_2=251.8935$	$q_2=45$
	44.5233	237.0524	
$q_5=3$	$r_6=14.7398$	$r_4=14.8411$	$q_4=4$
	13.7768	14.7398	
$q_7=136$	$r_7=0.9630$	$r_8-0.1013$	$q_8=1$

并把所得结果整理成表

累	益		累	损	
n	商 q_n	强 弱	不尽(r_n)	益 段 x_n	损 段 y_n
2	45	弱	231.8935	45	1
3	5	强	59.2631	226	5
4	4	弱	14.8411	949	21
5	3	强	14.7398	3073	68
6	1	弱	0.1013	4023	89
7	136	强	0.9630	550065	12172

我们从黄宗宪图式易于理解建部贤弘通过更相减损办法把不定式表示为连分式

$$\frac{13187306}{595947705}=\frac{1}{45}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{136}$$

经过逐步截尾取最佳渐近分数$\frac{yn}{xn}$$(1\leqslant n\leqslant 7)$，交替取得不足(弱)过剩(强)近似值，使不等式(3)左端值小于1而最接近于1，因此原题答案是

$$x_7=550065,\quad y_7=12172。$$

4．剩一术 关孝和在用汉文写的《括要算法》卷2中明确讲到如何用更相减损术计算形如

$$ax\equiv 1\ (mod b)$$

同余式的乘率步骤。例如他所举例："今有以左一十九累加之得数，以右二十七累减之剩一，问总数几何。"按此题就是解同余式

$$19\,x\equiv 1\ (mod\ 27)$$

关氏的答案是："左总数一百九十"，而他的解法，所拟求乘率步

骤适与黄宗宪寄数求一术不谋而合，他写道："以左一十九除右二十七得商一（按即黄宗宪图式 $q_1=0$，$J_1=1$，$q_2=1$），不尽八为甲（r_2）。以甲不尽八除左一十九，得商二（q_3），不尽三为乙（r_3）。以乙不尽三除甲，不尽八，得商二(q_4)，不尽二为丙(r_4)。以丙不尽二除乙不尽三，得商一(q_5)，不尽一为丁（r_5）。乃余左一为止。甲商与乙商相因加一得三为子（按即 $J_3=q_3J_2+J_1$）。子与丙商相因，加甲商得七为丑（$J_4=q_4J_3+J_2$）。丑与丁商相因加子得一十($J_5=q_5J_4+J_3$)。以左一十九乘子，得左总数一百九十，合问。"①

关孝和把解同余式

$$ax\equiv -1 \pmod b$$

称为损一术，作一次同解变换

$$(b-a)x\equiv 1 \pmod b$$

就归结为剩一术。

5. 诸约混一术 会田安明著《诸约混一术》(1784 年出版)，书中记一次不定方程题，通过变换取代，把多元不定方程组化为二元方程，然后仿照剩一术或损一术按同余式解。如书中有题："百钱买柿、梨、栗百枚，每柿值一文，每梨值二文，十栗值二文，问各几何。"考虑柿数是梨、栗数和与钱数之差，就归结为二元方程，这又显然源自我《张邱建算经》百鸡问题。

三 东西方比较

欧几里得《几何原本》卷 7 论求最大公约数，李善兰(1811—1882)十岁读《九章算术》精通我国传统数学，直截了当译为求等数。《几何原本》卷 7 第 1 题："两不(相)等数，辗转相减，余一而止，则

① 参考文献[5]《关孝和全集》解说第 165 页对此题用连分式说明演算过程似不合关氏原意，因在历史上，中算、和算俱无连分式概念。

为两无等数之数”。第 2 题：“两数…求其最大等数。法曰：…辗转以小减大，必有减余数可度两数，…故最后减余数必为等数也。”由此可见具有世界声誉的欧几里得算法与我《九章算术》立术正合。这种辗转相减法流传欧陆，直到 1494 年意大利帕西沃里(L. pacioli, 1445—1509)著《算学大成》还是用辗转相减法来求两数的最大公约数。李之藻(1565—1630)编译《同文算指》(1613 年出版)，书中介绍当时东西方各种算术问题。卷下称最大公约数为纽数，并复述求法：“既难折半…，须另立纽数，…以小减大，减尽而止，以最后减尽数用以除子、母二数。”李本人没有见过《九章算术》，所以以为这个“纽数…多昔贤未发之旨”，这是十分误解。事实上我国远在《九章算术》成书年代已总结这一方法，而且在公元 5、6 世纪时我国数学家还借以处理最小公倍数问题已如前述。

日本人民吸取我国丰硕数学成果，在 17、18 世纪用更相减损术讨论整数论有关问题，取得斐然成绩，某些结论还青出于兰与胜于兰。“互约术”较我同类结果有所提高，“零约术”发展为连分数表达近似值，系新创。关孝和在“剩一术”中对秦九韶大衍求一术所作浅显易明解释，编出计算程序，比我张敦仁、黄宗宪同一工作要早许多年。“累约术”尤为突出，正如藤原松三郎所说①：“此术在西欧直到 1888 年雅可比(C. G. J. Jacobi, 1804—1851)遗稿发表后才大白于世，而建部贤弘的工作较之应超前一百四十年。”

在欧洲数论著作中解同余式(1)，有的用欧拉函数 $\varphi(m)$，m 相当大时，化简工作量大。有的迳用除法化为连分数，运算手续也很可观。有的用横式心算更费时易误。经过比较，黄宗宪图式有非凡优越处。

---

① 见参考文献[6]。

我国数学历史悠久，有其特色。本文所论更相减损术，其运算流程不只局限于最后获得等数(最大公约数)，有时要用它的累减次数(商)，有时要用到前后累减次数的乘积，有时有意识地控制左行余数是1。总之更相减损术源远流长，根深叶茂，为用甚大，因此在安排数论等有关课程中应引起我们充分注意。

(初稿1980、9，二稿1981、7，三稿1981、12。)

主要参考文献

[1] 钱宝琮校点，《算经十书》，1963。

[2] 华罗庚，《数论导引》，1975。

[3] 张德馨，《整数论》，1956。

[4] 程廷熙，"更相减损的优越性"，《数学通报》，1953，12月号

[5] 平山谛等编，《关孝和全集》，1974。

[6] 远藤利贞，《日本数学史》，1918。

[7] 藤原松三郎，"建部贤弘の累约术"，《东北数学杂志》，1939，第46卷第2期。

[8] J. Needham, Science and Civilization in China, vol. 3, 1959.

[9] U. Libbrecht, Chinese Mathematics in 13 th Century, 1973.

《九章算术》中的比率理论

李　继　闵

比率论在《九章》所形成的古算体系中占有特殊重要的地位。刘徽称今有术为"都术"（意指它的应用极为广泛），视齐同术为"算之纲纪"（强调其在理论上的基础作用），对比率算法"甚足珍贵"。

然而，迄今关于中算理论的研究中，这一重大课题并未受到应有的重视。究其原因，大致有二：一是"率"之概念及其理论肇源甚古，几经发展演变，其意义真谛已难为今人所理解；二是不了解中算比率论与西方比率算法之重大差异。

作为清理古算理论体系工作中不可缺少的一环，本文将对率的概念及其理论发展源流进行初步探讨，这对于研究秦汉以前我国古算理论的形成与发展具有极为重要的意义。

一　从物物交换中产生的率概念

我国最早的比率算法当是《九章》的"粟米之法"。徽注云："以御交质变易"。可见它产生于远古的物物交换。

远在距今五、六千年的仰韶文化中，已经发现货物交换的痕迹。相传夏朝的商业便很发达。原始的商品交换是以物易物的直接交换形式，但随着交换活动的频繁，逐渐形成了各类不同物品间固定的交换比率。《九章算术·粟米》之篇首列出了二十种不同品种和质量的谷物的交换之"率"："粟率五十，粝米三十，粺米二十七，……。"即是

$$粟\ 50=\begin{cases}粝米\ 30, \\ 或粺米\ 27, \\ 或\cdots\cdots。\end{cases}$$

(实际上这表示出商品的扩大的价值形态。)可见古代把商品交换中等价物各自的(标准)数量称为"率"(lǜ)。表示率的这组数并非唯一确定的。徽注指出"(率)可约者约之。"例如"粟率五十,粝率三十",可约为"粟率五,粝率三"。说明古人早已发现率是可以同缩小(或扩大)若干倍的一组(变)数。关于物与物按率数相交换(以率相通)的意义,刘徽作了抽象的理论分析。"今有术"徽注云:"……故为率者必等之于一。据粟率五,粝率三,是粟五而一,粝米三而为一也。"按刘徽之意,粟五能与粝三相交换,是因为粟五="一",粝三="一",故有粟五=粝三。(这里的"一",实质上表示抽象的价值单位。)率既然"等之于一",它便含有(标准)单位的意义。在古文中,"率",通"锊",原为古重量名①,后来引伸为一定标准。此处的"率"大概取义于斯。

我国大约在殷周时代便出现了货币②。"钱币权百物的贵贱,作价格的标准,通农商的有无,为交易的媒介。"货币作为一般等价物出现之后,商品的间接交换代替了直接交换。与此相适应,交换中的率便有了新的统一的规范形式,即"每物几钱",例如

$$瓴甓\ 1\ 枚=8\frac{8}{9}钱,$$

$$竹\ 1\ 箇=5\frac{35}{47}钱,$$

$$\cdots\cdots。$$

(实际上这表示出商品的货币的价值形态。)用这种形式表示的率,

---

① 《史记·周本纪》:"其罚百率"。裴骃集解:"徐广曰:'率即锾也'。孔安国曰:'六两曰锾'"。按"锾"与"锊"古为一字。

② 见钱无咎,《古钱考略》,湖南人民出版社。

《九章》称之为“经率”(它相当于现代所谓的单价)。“经”，规范、经常之意。“经率”即是货币出现后，常用的标准的率。当物之度量为复合单位(例如斛、斗、升)时，求单价必遇到分数相除，《九章》称之为“经术术”，两“术”字迭用，意在表明运算较为复杂。

我国“至秦废贝行钱”。币制以一钱为最小单位。但由经率术算出的单价有时为分数，这在实际上无法进行钱的找补。于是古人对商品采用贵、贱(大、小)两种不同的价格，以保证单价为议数。例如，“粟米”[三八]问竹价为

“其四十八箇，箇七钱(贱率)。

其三十箇，箇八钱(贵率)。”

因为此时“钱有二价，物有贵贱”，交易中价格需由买卖双方商议而定，故称之为“其率”。“其”，含有拟议或揣测之意①。其率术仅当钱数大于物数时才能使用，而相反的情形，“率”则表为“每钱几物。”此时钱与物的地位与其率正相反，故称为“反其率”。

综上所述，我国关于比率算法最早的系统叙述见载于《九章算术·粟米》。虽然《九章》最后成书于秦汉时期，但“粟米之法”无疑是远古时代数学知识的总结。商品交换产生于原始社会末期，我国至少在五、六千年前就已出现，因此，交换中产生之率概念，当是非常久远的。而从古文“率”与“锊”通，表古重量名，这与率作为交换单位在意义上是相通的。此外，[宋]杨辉在其《详解九章算法》附“纂类”中，把今有术问题都归入“互换”门，废去“今有术”名目。这表明杨辉早已认定比率算法来自商品互换。由是观之，说率之原始概念产生于物物交换大抵是可信的。

---

① “其”，犹“殆”。表拟议或揣测。《易·系辞下》：“《易》之兴也，其于中古乎?”

二　率概念之扩展和它的数学定义

我国古代数学家具有卓越的理论概括能力，善于从实用算法中提炼出深刻的数学概念，总结成精湛的数学理论。刘徽是这方面的杰出代表，他所给出的"率"定义以及对率论诸术的论证，便是其中的菁华。

《九章算术·方田》"经分术"刘徽注云："凡数相与者谓之率。率者，自相与通。有分则可散，分重叠则可约也。等除法实，相与率也。"

上述率的定义中，四句话包含着四层意思。

其一，"凡数相与者谓之率。"这句话在于说明率是什么，属于定义的外延。"相与"，共同，相交往。这里当释为"相关"。是说，凡是一组相关的（变）量它们都叫做"率"。这里所谓的"相关"，乃限于数量成比例变化的相依关系①。例如，圆周长与直径是一对"相与"之数，故称为周率与径率；彼此相交换的粟、粝米、粺米、……等数量，是一组"相与"之数，故称为粟率、粝率、粺率、……。

其二，"率者，自相与通"。这句话在于强调作一组率的诸数间的相依关系。意思是说，率与率之间应是彼此相通的。"通"，贯通，由此至彼，中无阻隔。粟率五与粝率三相通，原始的意义是粟五与粝三相当，彼此可以交易，引伸之义为粟五与粝三相对应。周率三与径率一相"通"，自然是说周长为三时对应的径是一。因此，这里的"通"比"同"涵义更广，包含着对应的意思。所谓"率者，自相与通"。用现代数学术语来说，即是用来表示率的一组数，必须是成比例变化的量之一组对应值。

其三，"有分则可散，分重叠则可约也。"这在于指出率的基

① 《九章》时代所涉及到的数量关系绝大多数是线性的。从《九章》中可以觉察到，古代数学家甚至有"认为一切数量都是成比例变化"的倾向。

本属性，是率概念的内涵。意思是说，作为一组率(值)，可以同乘或同除以一（不为零的）数。这实际上是由相关率的一组值变为它的另一组值。

其四，“等除法实，相与率也。”这在于强调对于一组率(值）的化简。是说，当各率（值）有公因数时，则通常应当用公因数(“等数”)去约简它们。这样一组用互质的正整数来表示的率(值)，称之为“相与率”①，它是一组率的最简的标准的表示。

总起来说，刘徽上述关于率的定义，改用现代的数学术语与记号可叙述如下：

一组相关的（变）量 x_1，x_2，……x_n，（$n \geqslant 2$），若它的任意两组对应值(x_1'，x_2'，……，x_n')和(x_1''，x_2''，……，x_n'')皆有

$$x_i''=kx_i'，(k\neq 0，i=1，2，……，n)$$

成立，则称每个 $x_i(i=1，2，……，n)$为一个率。

刘徽在关于率的注文中还常用到“势”这一术语。例如：

“齐者，子与母齐，势不可失本数也。”(“合分术”注)

“今斤两错互而亦同归者，使乾丝以两数为率，生丝以斤数为率，譬之异类，亦各有一定之势。”(“衰分”[十七]问术注)

“是为别种而方者率居三，通其体而方者率居一。虽方随棊改，而固有常然之势也。”(“商功”阳马术注)

“以下第一衰为法，以本重乘其分母之数，而又反此率乘本重为实。一乘一除，势无损益，故为本存焉。”（“均输”[十七]问注）

“幂图方在句中，则方之两廉各自成小句股，而其相与之势不失本率也。”(“句股容方术”注)

---

① 其实，在刘徽注中“相与率”与“率”常常混用。直到[宋]秦九韶将前者称为“定率”，后者叫做“泛率”，二者才有了严格的区分。

刘徽注中未见对“势”的意义加以界说。“势”，形势、情势之意，含有状态的意思。“句股容方术”徽注说，两相似句股形“其相与之势不失本率”。按此，“势”是由“率”来表征的。所谓“齐者，子与母齐，势不可失本数。”这里的“本数”即“本率”，因为母、子之数，在中算家的分数理论中等同于一对率。按此意，分母、子同乘以一数不改变由率所组成的势。换句话说，成比例的两组率值(x_1'，x_2'，…，x_n')和(kx_1'，kx_2'，…，kx_n')被认为有相同的“势”。所以，刘徽所谓的“势”，就是指一组率(x_1，x_2，…，x_n)的全体。如果此说不谬，刘徽把一组率叫做势，这与现代用一组坐标表示一个状态或方向何其相似乃尔！

按刘徽所定义的率，是一个相当广泛的数学概念。它不仅概括了成比例变化的量，还可用以描述一般的变量的线性关系。正因为如此，率的概念与理论可以广泛地应用于各种线性问题中去，以致在盈不足、方程诸术中也可以“广施诸率”了。考察《九章》诸术，所使用的率名目繁多。由于不了解古算率概念的高度概括性，莫名其“妙”处，反会误认为《九章》原著者对率概念使用不当。其实，《九章》所用之“率”无一不符合刘徽的定义。这里不逐一检查，仅择要说明。

《九章算术·方田》“合分术”徽注有云：“其一术者可令母除为率，率乘子为齐”。是说，在诸分数$\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_2}{a_2}$，…，$\frac{b_n}{a_n}$通分时，可令$A=\prod_{i=1}^{n}a_i$，

$$k_i=\frac{A}{a_i}，(i=1，2,\cdots,n).$$

用k_i乘第i个分数的分子与分母，则得

$$\frac{b_i}{a_i}=\frac{b_i\times k_i}{a_i\times k_i}=\frac{b_ik_i}{A}(i=1，2,\cdots n),$$

从而完成了通分①。其所以将这一组乘数(k_1, k_2, $\cdots$, k_n)称之为率，这是因为若用 $k_i' = mk_i$ 来代替 $k_i(i=1, 2, \cdots, n)$同样亦能达到通分，因而符合率之一般定义。

"均输"[十七]问术文中有所谓"差率"。按该问五尺之金箠，从末至本各尺之重便成列衰(即率):x_1, x_2, $\cdots$, x_5。术曰："令末重减本重，余即差率也"。意思是说，(x_1, $x_2\cdots$, x_5)为一组率，若令差 $x_6=x_5-x_1$，则(x_1, x_2, $\cdots$, x_5, x_6)也构成一组率，其中 x_6 称为"差率"。显然，这也是符合率的一般定义的。

"均输"[十九]问术文中有所谓"上率"、"下率"。徽注云："此二率者，皆为平率"。所谓"平率"，就是几个率的平均值（同样，它也是一个率)。本题中，将竹之九节的容量(x_1, x_2, $\cdots$, x_9)看成一组率，它们在筹式中列成竖行。令 $y_1=\dfrac{x_7+x_8+x_9}{3}$，$y_2=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$，它们都是平率。$y_1$ 是由下三率所得之平率，故称下率；y_2 是由上四率所得之平率，故称上率。

"盈不足"术中有所谓"所出率"。术文曰："置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并以为实。并盈、不足为法"。这里将所出数称为所出率是有道理的。因为，由"出钱 a，买物 1，盈(不足)钱 b"，显然有"出钱 ka，买物 k，盈(不足)钱 kb"，即出钱、买物、盈朒三者是一组成比例的量，故称之为率②。

《九章算术·方程》徽注有云："程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率"。这里所谓的"令每行为率"，是说将方程的每一行看成一组率，因为显然行中各物之数和下实，是一组成比例的量③。刘徽将方程的行定义为一组率，使方

① 参看本书《中国古代的分数理论》一文。

② 参见本书《盈不足术探源》一文。

③ 参见本书《<九章算术>与刘徽注中的"方程"理论》。

程的变形规则成为率的性质的自然推论，是非常深刻的。

三 比率理论的两个基本法则
——齐同术与今有术

在丰富多彩的中算比率理论中。最重要和最基本的法则便是齐同术与今有术。

齐同术作为分数通分、比率算法、盈不足术与方程术等的理论基础，在古算中得到广泛的应用。所以刘徽注云："乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎"。以往关于齐同术的研究，仅就它在不同数学领域中的特殊形式作出解释，未能从统一的率的理论出发揭示出其各种表现形式的共同本质。

要了解齐同的意义，应先知道它的用处。刘徽注说："凡率错互不通者，皆积齐同用之"。又说"齐同以通之"。可见齐同术是用来将错互不通之率演变为相通之率的。在"均输"第[十]问中，刘徽对此详加解释。题曰："今有络丝一斤为练丝一十二两；练丝一斤为青丝一斤十二铢。今有青丝一斤，问本络丝几何？"徽注有云："一曰，又置络丝一斤两数与练丝十二两，约之，络得四，练得三，此其相与之率。又置练丝一斤铢数，与青丝一斤十二铢约之，练得三十二，青得三十三。亦其相与之率。齐其青丝、络丝，同其二练，络得一百二十八，青得九十九，练得九十六，即三率悉通矣"。是说，络、练相与之率为(4，3)；练、青相与之率为(32，33)。此时练之二数(3与32)不同，络与青之数(4与33)并不相当，故此络、练、青三率"错互不通"。若用32遍乘(4，3)，得络、练之率(128,96)；用3遍乘(32,33)，得练、青之率(96,99)。于是便得络、练、青"相与大通"之三率(128，96，99)。这种化"错互不通"之两组率为"相与大通"的演算便是所谓的"齐同术"。

齐同术用现代记号可叙述如下：

设 $x_1, x_2, \cdots x_k, \cdots, x_n$ 是一组成比例而变的量（即"率"）。若 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 有一组相应的（率）值 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$； 而 $x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n$ 有一组相应的（率）值 $(b_k, b_{k+1}, \cdots, b_n)$， 且 $a_k \neq b_k$。问题是要求出变量 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n$ 的一组相应的（率）值。

解决的一般法则（即齐同术）是，用 b_k 和 a_k 分别去乘前、后两组（率）值，即

$$(a_1, a_2, \cdots a_k) \xrightarrow{\text{以 } b_k \text{ 遍乘}} (a_1 b_k, a_2 b_k, \cdots, a_k b_k);$$

$$(b_k, b_{k+1}, \cdots, b_n) \xrightarrow{\text{以 } a_k \text{ 遍乘}} (b_k a_k, b_{k+1} a_k, \cdots, b_n a_k).$$

于是得到 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n$ 的一组相应的（率）值

$$(a_1 b_k, a_2 b_k, \cdots, a_k b_k, b_{k+1} a_k, \cdots, b_n a_k).$$

此术何以称为"齐同"？刘徽对分数的齐同解释说："同者，相与通同共一母也。齐者，子与母齐，势不可失本数也"。将刘徽的这一解释推而广之：齐，同组中的各率（值）增长的倍数必须"一致"，（即用适当的一数遍乘各率）；同，一个变量（x_k）在各组中相应的（率）值要"相同"（$a_k b_k = b_k a_k$），这样各率才能"相通"。如果将刘徽所说的"势"理解为一组率的全体，那末，齐同术就是为使两组率"相与大通"，"势"在"不失本率"条件下的变形规则。

今有术是率的理论通向应用的桥梁。刘徽说："此都术也。凡九数以为篇名，可以广施诸率，……因物成率，审辨名分，平其偏颇，齐其参差，则终无不归于此术也"。这里，刘徽指出今有术是古算中广泛应用的普遍法则。其应用的要旨是，首先找出事物间的比率关系，分清其中的所有数、所求率和所有率，（在率"错互不通"时，还须"齐同以通之"），然后按固定的今有术公式来计算所求之数。

今有术曰："以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如

法而一”。即为公式

$$所求数=\frac{所求率\times所有数}{所有率}.$$

此法则由何而来？刘徽注以粟、粝互换为例，作了两种解释。

其一是“……故为率者必等之于一。据粟率五、粝率三，是粟五而为一，粝米三而为一也。欲化粟为粝米者，粟当先本是一。一者谓以五约之，令五而为一也。讫，乃以三乘之，令一而为三。如是则率等于一，以五为三矣。然先除后乘或有余分，故术反之”。按刘徽之意，以粟换粝可视为按两步来实现的。首先，将粟数化为若干个交换的(价值)单位“一”(“先本是一”)，即是

$$粟数\div粟率=若干个(价值)单位。$$

然后，将交换单位再化为粝米数，即有

$$粝米数=(粟数\div粟率)\times粝率。$$

但是，先乘后除可能遇到除不尽的麻烦，故改为

$$粝米数=\frac{粝率\times粟数}{粟数},$$

便得“粟米之法”——今有术。这种解释自然来自古老的物物交换。

另一种解释是：“又完①言之，知粟五升为粝米三升。分言之，知粟一斗为粝米五分斗之三。以五为母，三为子。以粟求粝米者，以子乘，其母报除也”。是说，粟率与粝率，用整数来表示(“完言之”)，就是粟5、粝3；而用分数来表示(“分言之”)，

今有术法则当由率之定义推导如下：

设 x 与 y 是成比例而变的量(即率)，其一组相应的(率)值为(x_1,y_1)，求当 $x=x^*$时所对应的 y 值。由率的基本性质，有

$$(x_1,y_1)\xrightarrow{\text{以}x_1\text{遍除}}\left(1,\ \frac{y_1}{x_1}\right)\xrightarrow{\text{以}x^*\text{遍乘}}\left(x^*,\ \frac{y_1\times x^*}{x_1}\right).$$

故得 x^*所对应的 y 值为

$$y^*=\frac{y_1\times x^*}{x_1}.$$

由此看来，刘徽注所阐述的今有术与齐同术，它们在理论上都是由率的基本性质推导而来，已是逻辑的必然结果，而并非简单的经验总结了。

四　比率理论的一些应用与发展

率的概念与理论几乎渗透到«九章»的全部理论之中，甚至盈不足、方程、句股各章的算法都是建立在率的理论基础上的。这里仅限于现代所谓“比例算法”的范围，探讨古算的渊源与特色。

衰分术，相当于现代的“比例分配”。术曰：“各置列衰，副并为法，以所分乘未并者各自为实，实如法而一。不满法者，以法命之”。刘徽解释说：“法集而衰别。数本一也，今以所分乘上别，以下集除之，一乘一除适足相消，故所分犹存，且各应率而别也”。这段话说明了衰分术的由来，结合术文，它的意思是：

若要将数 A 按列衰(即率)$(x_1',x_2',\cdots,x_n')$分为 n 个数，令 $y'=\sum_{k=1}^{n}x_k'$，则$(x_1',x_2',\cdots,x_n';\ y')$也是一组率。用“所分”$A$乘各率，又以“下集”①$y'$除各率，即

① y'是诸率之和，故称为“集”；又因筹式中列衰由上至下排成竖行，y'副置于下，故又称“下集”。

$$(x_1^{\cdot},x_2^{\cdot},\cdots,x_n^{\cdot};y^{\cdot})\xrightarrow{\text{以}A\text{乘，}y^{\cdot}\text{除}}\left(\frac{x_1^{\cdot}\times A}{y^{\cdot}},\ \frac{x_2^{\cdot}\times A}{y^{\cdot}},\cdots,\ \frac{x_n^{\cdot}\times A}{y^{\cdot}};\ A\right).$$

于是，$y^{\cdot}$经这一乘一除，正好消去$y^{\cdot}$而得A（即“一乘一除适足相消，故所分犹存”）；而其余各数正好是按对应的列衰所分得的数（“且各应率而别也”）。

衰分术是今有术的发展，正如刘徽所指出：“于今有术，列衰各为所求率，副并为所有率，所分为所有数”。是说，衰分中，将x 作为所求率，$y^{\cdot}$作为所有率，A作为所有数，它就与今有术完全一致了。在“方程新术”中，刘徽将衰分术推广为更一般的形式，从而得到方程的一种求解法则①。

现代所谓的反比例问题，在《九章》中是和正比例问题统一起来处理的，这就是“返衰术”。设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为一组列衰，则称由它们的倒数组成的列衰$\left(\frac{1}{x_1},\ \frac{1}{x_2},\cdots,\frac{1}{x_n}\right)$为“返衰”。术曰：“列置衰而令相乘，动者为不动者衰”。这说的是将返衰中的各个分数$\frac{1}{x_k}(k=1,2,\cdots,n)$化为整数的方法（因为，一般要求列衰用一组整数表示）。其步骤是：先在算板上排出列衰$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，（“列置衰”）。要求$x_k(k=1,2,\cdots,n)$所对应的返衰，将x_k不动，而令其余各衰相乘，所得$y_k=x_1x_2\cdots x_{k-1}x_{k+1}\cdots x^n$便是$x_k$所对应的返衰（“令相乘，动者为不动者衰”）。即$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对应的返衰为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。刘徽注中说：“亦可先同其母，各以分母约其同，为返衰”。意思是说，将返衰$\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\cdots,\frac{1}{x_n}\right)$中各分数之公分母$B$求出，则$y_k=\frac{B}{x_k}$。（因$B$是

① 参见本书<《九章算术》与刘徽注中的“方程”理论>。

$x_1, x_2, \cdots, x_n$的公倍数，y_k必为整数)。显然，这一法则是由率的基本性质推出：

$$\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \cdots, \frac{1}{x_n}\right) \xrightarrow{\text{以}B\text{遍乘}} (y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

在实际问题中，列出返衰便可依衰分术求解了。

"均输"是按人口的多、少，路途之远、近来摊派赋税、徭役，它是组合着若干成正、反比例的量的复杂的分配问题。例如，担负徭役的各县户数依次为$a_1, a_2, \cdots, a_n$；各县至输所行日数为$b_1, b_2, \cdots, b_n$。摊派的徭役数应是户数多者多出，路程远者少出。前者以$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$为列衰，后者以$\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right)$为返衰。因此，均输是衰分与返衰的结合。徽注云："令县户数，各如其本行道日数而一，以为列衰"。即均输问题最后归结为以$\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right)$为列衰的衰分术求解。

通览《九章》可知，现代所说的正比、反比、复比、连锁比、比例分配等各种比例问题，在我国古代都统一地归结为今有与衰分去解决，所以徽注中常用"今有衰分求之"的话。此外，《九章》中还有许多现今看来不属比例问题的题目，也用今有、衰分求之。例如，"均输"[十六]问的"主客追及"问题，[二十]问的"凫雁相遇"问题都化为比率算法求解。可以说，中算家对于比率理论的应用之广泛与巧妙是无与伦比的！

比率理论在我国古代几何学中的应用是应当特别指出的。众所周知，从分析各种形体截面积的比率入手，提炼出"幂势既同则积不容异"的重要原理，从而巧妙地解决了许多著名的求积问题。然而，比率论在几何上最精采的应用乃在于句股测量。"句

股容方术"徽注，提出了重要的"不失本率原理"①，这一中国特殊的相似句股形原理，成为句股测量的理论基础。从由句弦并率和股率，求句、股、弦三率的探求中，刘徽得出句率$\frac{1}{2}(m^2-n^2)$，股率 mn，弦率$\frac{1}{2}(m^2+n^2)$，即证明了整句股数的一般公式②。重差术是我国古代测望理论的重大成就，其理论之关键在于"句股则必以重差为率"，说明它是与比率理论密切相关的。分析重差，所谓"以重差入之"，即是利用下述比例性质：

$$若\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}，则有\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{a_1-b_1}{a_2-b_2}③.$$

由于刘徽重差图说俱已失传，上述比例法则的由来无从稽考。但是，仿照刘徽推证齐同、今有、衰分诸术的方法，由率的基本性质容易得出上面的"重差"法则。今试析如下：

首先，$\quad \frac{a_1}{a_2}=k=\frac{b_1}{b_2}\Longleftrightarrow a_1=ka_2, b_1=kb_2\Longleftrightarrow(a_1,b_1)$和$(a_2,b_2)$为$(a，b)$的两组(率)值。

其次，引入差率 $a-b$，对于$(a,b,a-b)$的两组相应的(率)值(a_1,b_1,a_1-b_1)和(a_2,b_2,a_2-b_2)应用上面的结果，便有

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{a_1-b_1}{a_2-b_2}.$$

五　中算比率论研究中的几个问题

率的概念是一个值得深入研究的问题。如何理解古算中的率，是研究比率理论乃至古算体系的一个关键。率之概念肇源甚

---

① 见李继闵，《从句股比率论到重差术》将刊《科学史集刊》。

② 见李继闵，《刘徽对整句股数的研究》，《科技史文集·数学史专辑》，上海科技出版社。

③同①

古，几经演变，今昔之意义已不相同，如果不历史地加以考察，而以今人之思想去揣古人之意，必然会有许多地方解释不通。

"率"这个词在现代数学和其它科学中仍常用到，诸如圆周率、速率、功率、增长率、变率等等，用以表示两个量的比值。它们往往是绝对常数，或者在具体问题中为定值。古算中的率显然不是两个量的比值。古代用"周率百四十二，径率四十五"来表示圆周长与直径的关系。这里的周率、径率各为一数，相当于比的两个项而不是比值。而所谓句率三、股率四、弦率五，这里是三个量，更不能说成两个量的比值了。可见古今"率"的涵义已不相同。

古算中的率常被看作变量。刘徽注云："凡所谓率者，细则俱细，粗则俱粗，两数相推而已。"可见相关的一组率就是一组成比例而变的数。对于《九章》中已有变量的观念似乎令人难以置信，可能有人会提出诘难：古代没有今天的变量记号，它如何表示，在筹式中又如何演算？徽注云："因物成率，审辨名分"，可见古代率的名称是以它所代表的事物来称呼的，如粟率、粝率、周率、径率，就用这些名称来表示相应的变量。(在分数论中子与母就是这样一对变量的名称与表示)。而在筹式中各率列在一定的位置，这时每个确定的位置代表着一个变量。布列在该位置上的筹码仅表示这个变量的一个值。值得注意的是，在具体问题中总把一组常数叫做率，这是因为变量正是通过一系列常量来表现的，在这里不去区分变量和它的值并不会带来应用上的困难。

那末，现代的"率"与古算中的"率"又有什么联系呢？这种联系可以从"经率术"中找到。曾有人提出"经率术"诸问属于求物品之单价，似不应列入讲比率算法的"粟米"章的疑问。按经率术文："以所买率为法，所出钱为实，实如法而一"。其运算为两数相除，似与今有术无关。李淳风的注文正确指出，经率术实际上是今有术之特例。因为此处所求率为一，"但以一乘不长，故不复

乘。是以径将所买之率与所分之钱为法、实也”。这里的钱 a，物 b 二量构成一对率，“经率”要求物数为 1，故由率之性质，有

$$(a,\ b)\xrightarrow{\text{以 } b \text{ 遍除}}\left(\frac{a}{b},1\right).$$

于是钱率$\frac{a}{b}$，物率 1。这便是“经率”。大概是由于经率的这种表示法具有统一而简便的优点，它逐渐在应用中取得了“独霸天下”的地位，原始的率的表示法消声敛迹了。例如由“周率三、径率一”，演变为只用一个数字 π 表圆周率了。率的表示就这样从两个数简化为一个数(另一个“一”被略去)，于是率的意义也就转化为现今的两个量的比值(因而为常量)了。

其率术和反其率，是比率算法中的一个疑点。很早以前三上义夫便认为其率术与反其率术属于中国最早的不定方程整解问题，它们不应列入粟米之法，推断这种情形是由于《九章》在流传中发生“错简”的缘故①。如前所述，其率术乃由经率术发展演化而来。设有钱 A，买物 B，当 $A=mB+r$ ($m\geqslant1$，$1\leqslant r<m$，其中 A、B、m、r 均为自然数)时，物之单价(经率)$\frac{A}{B}$便不能表为整数。为使单价为整数而采取贵、贱两种价格，这就是其率术。徽注云：“如欲令无分，按出钱五百七十六。买竹七十八箇，以除钱得七，实余三十。是为三十箇复可增一钱。然则实余之数即是贵者之数。故曰‘实贵’也。本以七十八箇为法，今以贵者减之，则其余悉是贱者之数。故曰‘法贱’也”。这段话的意思是说，若按经率术，则

$$\frac{A}{B}=m\cdots\text{余 } r\ .$$

将所余 r 钱，分配给 r 件物($r<B$)，则有 r 件物之单价为 $m+1$

① 见三上义夫，《中国算学之特色》，第六章。

钱(贵率)，而其余($B-r$)件物之单价为m钱(贱率)。即

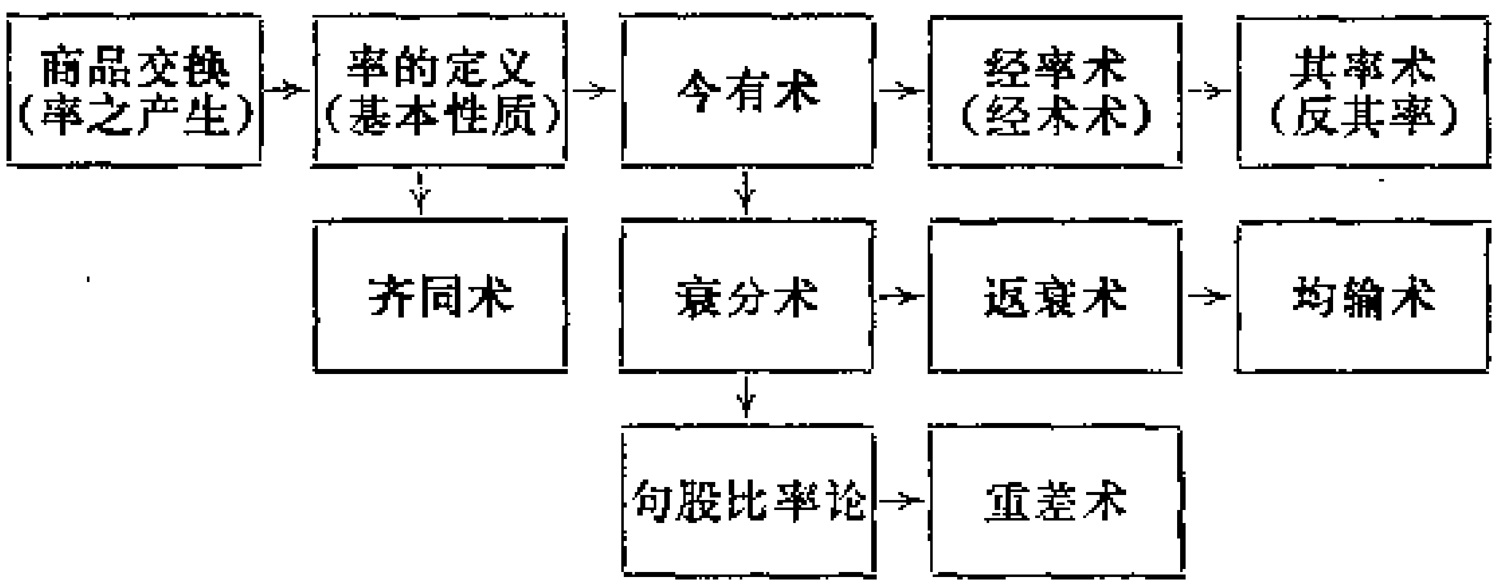
$$A=mB+r=m[(B-r)+r]+r$$
$$=(B-r)m+(mr+r)=m(B-r)+(m+1)r.$$

由此可见，其率术是由交换中单价的计算而来，与粟米之法一脉相承，算法上是经率术之发展，列入“粟米”理所当然，三上义夫所作“错简”的推断是难以成立的。

至于其率术为不定方程整解问题之说，也是值得商榷的。按徽注，其率术之立意造术并未见有列方程求未知数的意思。当物之计价单位选定之后，其贵、贱二价也是完全确定的。因为，贵贱二率乃是将经率的奇零部分入、舍而得。即贱率＝经率的整数部分；贵率＝经率的整数部分＋1。于是贵、贱二物之数量也就完全确定：贵物数＝r；贱物数＝$B-r$。因此，这里并不存在解的“不定”性。

*　　　*　　　*

考察中算比率理论，从太古的物物交换中逐步提炼出率的概念，到秦、汉时期已发展成为分支众多的理论体系了。其发展演化大致如下表：



我国古代的比率理论有着不同于西方和现代比例算法的一些特点。首先，中算比率论是以变量间的相依关系为研究对象。其全部法则和公式，都是从率的定义(基本性质)出发，由筹式的变

形而得到。这里的演算已不仅是数字的运算，而更多的是率之总体的变换。因而，从本质上讲，中算比率论更多地属于代数学的范畴。其次，中算比率论具有高度的概括力，它以极少的几个基本法则(齐同、今有、衰分)概括了全部理论，对于各种各样的现代所谓的比例问题作出统一的处理。最后，特别应当注意比率论在中算中的地位与作用。秦汉以前的算学所研究的问题基本上都是线性问题，而古代中算家企图用率的理论来作为一切线性问题的理论基础。正是这样，古代将盈不足术、方程术中所涉及的现代所谓的线性方程问题，都采用率的概念来描述，而用齐同术的方法与思想来作为解法的依据。所以说，比率理论是贯穿《九章》算学理论体系的一条主线，即刘徽所谓的“纲纪”。抓不住这个纲，就无法弄清中国古算的本来面目。

参 考 文 献

[1] 三上义夫著，林科棠译，《中国算学之特色》，商务印书馆，1934。
[2] M.克莱因著，张理京等译，《古今数学思想》，第一册，上海科技出版社，1979。
[3] 钱宝琮，《古算考源》，商务印书馆，1930。
[4] 钱宝琮，《中国数学史话》，中国青年出版社，1957。
[5] 钱宝琮主编，《中国数学史》，科学出版社，1964。
[6] 李俨、杜石然，《中国古代数学简史》，中华书局，1963。
[7] 许莼舫，《古算法之新研究续编》，中华书局，1945。
[8] 许莼舫，《中国算术故事》，中国青年出版社，1965。
[9] 梅荣照，“刘徽《九章算术注》的伟大成就”，《科学史集刊》，1963。10，第六期。
[10] 李继闵，《从句股比率论到重差术》，将刊《科学史集刊》。

《九章算术》与刘徽的今有术

白　尚　恕

今有术的渊源很早，流传十分广泛，是我国古代数学中的一项重要计算方法。在《九章算术》及刘徽的论述中，今有术是一个中心内容，对数学的发展起到了一定的推动作用。

《九章算术》第二章是"粟米"，这章之首即列有"粟米之法"，其法为：

"粟率五十，　粝米三十，
粺米二十七，糳米二十四，
御米二十一，小䵅十三半，
……　　……
飧九十，　　熟菽一百三半，
糵一百七十五。"

这是一张粮食兑换的比率表，从这表里可以明显地看出，比率是由以物易物形成的。在我国古代，很早就形成了"日中为市"，就是说，在日中正午时，人们就进行以物易物的交换，在交换中可能逐渐形成了物与物的比率关系。

《周礼·保氏》说："养国子以道。乃教之六艺：一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数。"《周礼》并没有把"九数"的细目列举出来，从后人的注释中可以看出一点端倪。如东汉末郑玄引郑众注说："九数：方田，粟米，差分，少广，商功，均输，方程，赢不足，旁要。今有：重差，夕桀，句股也。"其中所列"粟米"，实际就是各种粮食的兑换关系。由此可以说明至少在秦汉以前，由物物交换形成了粟米之法，又由粟

米之法逐渐形成了比例算法。

《墨子·杂守》说："升食终岁三十六石，参食终岁二十四石，四食终岁十八石，五食终岁十四石(四)升，六食终岁十二石；升食食五升，参食食三升(少半)，四食食二升半，五食食二升，六食食一升大半。"这就是比例运算：

$$36:24:18:14\frac{4}{10}:12=5:3\frac{1}{3}:2\frac{1}{2}:2:1\frac{2}{3}.$$

这段记载不但说明了比例的起源很早，也说明了比例的形成与分配有直接关系。

《九章算术·粟米》第一术就是今有术，术文为："以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如法而一。"即得：

$$\text{所求数}=\frac{\text{所求率}\times\text{所有数}}{\text{所有率}},$$

就是：　　所有率:所有数＝所求率:所求数，

或　　所有率:所求率＝所有数:所求数。

今有术实际就是四项比例算法，我国古代对这四项订有专名，分别叫做"所有率"、"所求率"、"所有数"及"所求数"。在粟米章里粟米之法的基础上，根据物与物的比率，由今有数据便可求得所求数据，因而今有术可能是由今有数据得名。

根据粟米之法所列的二十多种粮食的比率，如欲以一种粮食交换成另一种粮食时，只要给出一种粮食的今有数据，便可套用今有术公式求得另一种粮食的数据。

如粟米章第三问为："今有粟四斗五升，欲为糳米，问得几何。""答曰：为糳米二斗一升五分升之三。""术曰：以粟求糳米，十二之，二十五而一。"即：所有数为 45 升，因"粟率五十"、"糳米二十四"，故知所有率与所求率分别为 50、24。按今有术，则得所求糳米数(x)为：

$$x=\frac{45\times24}{50}=\frac{45\times12}{25}=21\frac{3}{5}\text{升},$$

即 $$50:24=50:x。$$

从《九章算术》的表面来看，用今有术解题的范围虽然不大，但实质上用今有术解题的思想却布列在全书之中。刘徽对今有术的认识十分深刻，应用范围也广，把今有术看作是一种普遍的解题方法。如刘徽说："此都术也。"就是说，无论什么样的题都可以今有术解答。他又说："诚能分诡数之纷杂，通彼此之否塞，因物成率，审辨名分，平其偏颇，齐其参差，则终无不归于此术也。"这说明刘徽不仅把今有术看成是一个重要的解题方法，而且从理论上看，甚至认为其他方法都是以今有术为基础演变而成的。因此，他对于应该用比例算法解的题，固然使用了今有术去解；但是对于不必或不应使用比例算法去解的题，他也用今有术加以解释。

如粟米章第三十二问："今有出钱一百六十，买瓴甓十八枚。问枚几何。""答曰：一枚，八钱九分钱之八。"此题解法为："经率术曰：以所买率为法，所出钱数为实，实如法得一钱。"即：

$$1\text{ 枚瓴甓}=\frac{\text{所出钱}}{\text{所买率}}=\frac{160\text{ 钱}}{18\text{ 枚}}=8\frac{8}{9}\text{钱}.$$

这道以钱买物题，实际是一道除法问题，但刘徽注说："按此今有之义，出钱为所有数，一枚为所求率，所买为所有率，而今有之，即得所求数。"刘徽又说："一乘不长，故不复乘，是以径将所买之率为法，以所出之钱为实，实如法得一钱。"按照刘注，所出 160 钱为所有数，1 枚瓴甓为所求率，所买 18 枚为所有率，1 枚瓴甓的钱数为所求数(x)。即：

$$x=\frac{1\times160}{18}=8\frac{8}{9}\text{钱},$$

或 $$160:18=1:x.$$

又如均输章第十二问："今有善行者行一百步，不善行者行六十步。今不善行者先行一百步，善行者追之，问几何步及之。""答曰：二百五十步。""术曰：置善行者一百步，减不善行者六十步，余四十步，以为法。以善行者之一百步，乘不善行者先行一百步为实。实如法得一步。"按术计算得：

$$\text{善行者追及步数}=\left(\frac{\text{先行步数}}{\text{两者所行步数差}}\right)\times\text{善行者所行步数},$$

即
$$\text{善行者追及步数}=\frac{100}{100-60}\cdot 100=250\text{步}.$$

这是一道时间、速度、距离关系的算术题，我国古代虽没明确提出来速度的概念，但从刘徽的注文中可以看出，他对速度的概念是很清楚的。如刘徽说："按此术以六十步减一百步，余四十步，即不善行者先行率也。善行者行一百步为追及率。约之，追及率得五，先行率得二。"刘徽又说："于今有术，不善行者先行一百步为所有数，五为所求率，二为所有率，而今有之，得追及步（x）也。"刘徽是按今有术来解这一问题的，即

$$2:5=100:x,\quad x=\frac{5\times 100}{2}=250\text{ 步}。$$

刘徽对于原本不是今有术的问题，也设法用今有术解释，他之所以用今有术解释，其原因可能有这样一种思想：一面提倡一题多解，一面非常重视多题一解。在他的注文中，除了注释原题的解法外，经常指出这题的其他解法，如方程术、句股容圆术即是。这就是一解多解的想法。另外他一再说"举一隅而三隅反"、言虽异词实则同归，这就是多题一解的想法，如今有术、齐同术即是。也就是说，他把今有术、齐同术等看作是可以解决多种类型题的通法。

《九章算术》所列衰分术、均输术实际就是配分比例或配分法，并不是四项比例算法，但刘徽却用今有术注释。

衰分术为："各置列衰，副并为法，以所分乘未并者，各自

为实，实如法而一。”刘徽注说：“于今有术，列衰各为所求率，副并为所有率，所分为所有数。”若用符号表示，即：

设列衰分别为 $u_1, u_2, \cdots u_n$，其和为 $U=u_1+u_2+\cdots+u_n$，又设所分之数为 M，所求数各为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。则得：

$$x_i=\frac{M\cdot u_i}{U},\ (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$U:u_i=M:x_i。(i=1,2,\cdots,n)$$

至于均输术，刘徽虽没有直接以今有术注释，但是，李淳风却按刘徽的思想以今有术注释了均输术。如均输章第一问术文为：“均输术曰：令县户数各如其本行道日数而一，以为衰。……，副并为法。以赋粟，车数乘未并者，各自为实。实如法得一车。……，以二十五斛乘车数，即粟数。”李淳风注说：“于今有术，副并为所有率，未并者各为所求率，以赋粟、车数为所有数，而今有之，各得车数。”

《九章算术》里还有用复比例解的问题，如均输章第十问：“今有络丝一斤为练丝一十二两，练丝一斤为青丝一斤十二铢。今有青丝一斤。问本络丝几何。”“答曰：一斤四两一十六铢三十三分铢之十六。”“术曰：以练丝十二两乘青丝一斤一十二铢为法。以青丝一斤铢数乘练丝一斤两数，又以络丝一斤乘之，为实。实如法得一斤。”

设络丝1斤为 a，其两数16为 a'，练丝12两为 b，练丝1斤的两数16为 b'，其铢数384为 b''，青丝1斤为 c，其铢数384为 c'，青丝1斤12铢的铢数396为 c''，又设络丝原斤数为 x，按术则有：

$$x=\frac{c'\cdot b'a}{b\cdot c''}=\frac{384\times16\times1}{12\times396}=1\text{ 斤 }4\text{ 两 }16\frac{16}{33}\text{铢}.$$

刘徽一面以复比例注释此术，一面以今有术注释。他说：“置今有青丝一斤，以练丝三百八十四乘之为实，实如青丝三百

九十六而一，所得青丝一斤用练丝之数也。又以络率十六乘之所得为实，以练率十二为法，所得即练丝用络丝之数也。是谓重今有也。”又说：“齐其青丝、络丝，同其二练，络得一百二十八，青得九十九，练得九十六，即三率悉通矣。今有青丝一斤为所有数，络丝一百二十八为所求率，青丝九十九为所有率。”还说：“又一术：今有青丝一斤铢数，乘青丝一斤两数为实，以青丝一斤十二铢为法，所得即用练丝两数。以络丝一斤乘所得为实，以练丝十二两为法，所得即用络丝斤数也。”

若以算式表示刘徽所提的三种算法，则得：

设青丝 1 斤用练丝之数为 y，用络丝之数为 x，即：

$$y=\frac{c\cdot b''}{c''},\quad x=\frac{a'\cdot y}{b},$$

或 $$c'':c=b'':y,\quad b:y=a':x.$$

这就是刘徽所说“重今有也。”

依题意，得：

$$络丝:练丝:青丝=a'\cdot b'':b\cdot b'':b\cdot c''=128:96:99,$$

则有： $$x=\frac{c\cdot(a'\cdot b'')}{(b\cdot c'')},$$

或 $$b\cdot c'':a'\cdot b''=c:x.$$

这就是刘徽用今有术解释的算法。

“又一术”则是：

$$y=\frac{c'\cdot b'}{c''},\quad x=\frac{a\cdot y}{b},$$

或 $$c'':c'=b':y,\quad b:y=a:x.$$

刘徽还说：“凡率错互不通者，皆积齐同用之。放此，虽四五转不异也。”其意即：

设 $n+1$ 种物品 A_1，A_2，$A_3,\cdots$，A_n，A_{n+1} 的 n 个比率为：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{A_2}{A_3}=\frac{a_2}{b_2}$，$\frac{A_3}{A_4}=\frac{a_3}{b_3}$，$\cdots$，$\frac{A_{n-1}}{A_n}=\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$，

$$\frac{A_n}{A_{n+1}}=\frac{a_n}{b_n},$$

则得：

$$A_1:A_2:A_3:\cdots:A_n:A_{n+1}=(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n):(b_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n):(b_1\cdot b_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot\cdots\cdot a_n):\cdots:(b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots b_{n-1}\cdot a_n):(b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_n).$$

设物品 A_{n+1} 的所有数为 M，由四项比例算法可求得物品 A_1 的所求数 x，即：

$$(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots a_n):(b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_n)=M:x,$$

或
$$x=\frac{M\cdot(b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots b_n)}{(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots a_n)}.$$

这就是刘徽把复比例的算法推广到一般的情况。

关于反比例，在用返衰术所解问题的注文中，可以隐约看到反比例的思想。如衰分章第九问术文的注文说："按此术，三人所持升数虽等，论其本率，精粗不同。米率虽少，令最得多。饭率虽多，返使得少。故令返之，使精得多而粗得少。于今有术，副并为所有率，未并者各为所求率，九升为所有数，而今有之，即得。"

此外，刘徽还把今有术应用在"方程新术"及"其一术"中。在线性方程组中，用加减法消去常数项，然后求得两物之间的比率，再用今有术即可求得方程组的解。如刘徽说："令左右相减，先去下实，又转去物位，求其一行二物正负相借者，易其相当之率。……，各据二物相当之率，对易其数，即各当之率也。更置减行及其下实，各以其物本率今有之，……，一物各以本率今有之，即皆合所问也。"在其一术说："置群物通率为列衰，更置减行群物之数，各以其率乘之，并以为法。……，以减行下实乘列衰，各自为实，实如法而一，即得。"

在句股章里，对于测量问题刘徽以今有术解释，又根据比例

的性质解决了两次或三、四次测望的问题。对于句股容方、句股容圆问题的算法，也用今有术及衰分术解释，刘徽还以"中方率"表示比例中项。如"股面之小句、股并为股，令股为中方率，……。"

在四项比例算法的技巧上，刘徽也给出了明确的说法。因于两数相除时未必能整除，如出现奇零分数，将给运算带来不便，所以不如改先除后乘为先乘后除。他说："然先除后乘或有余分，故术反之。"对于两数的比率，刘徽说："可俱为铢，可俱为两，可俱为斤，无所归滞也。"这是说两数扩大或缩小同一倍数时，其值不变。即：

$$\frac{a}{b}=\frac{na}{nb}，或\frac{a}{b}=\frac{a/n}{b/n}.$$

总上所述，刘徽不止把今有术的学说几乎布满《九章算术》全书之中，他还把今有术看作是解决问题的通法，也把今有术看作是其他算法的基本理论依据；即是作为配分比例、复比例、连比例、甚至反比例、追及术、方程新术、其一术以及句股测量术等的依据。正如华衡芳说："九章之中惟粟米一章真为四率比例之题，方田、差分、商功、均输虽非全是比例，而其中藏有比例之理，故皆可以比例通之。"

刘徽对今有术的论述和应用，使得后人对今有术提高了认识，也使得今有术得到了广泛的应用范围。可见刘徽对今有术的贡献是巨大的。

今有术是一种具体计算方法，是"以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如法而一。"即得所求数。据此可知异类项（所有数与所求率）相乘，而同类项（所有数与所有率）相除。今有术虽由今有数据得名，但它不能体现计算中的具体方法。更不能体现以物易物的换算精神。所以在杨辉《详解九章算法纂类》中把今有术归为"互换"门，废去今有术一名，并于"互换"第二说：

"互换乘除法曰：以所求率乘所有数为实，以所有率为法，实如法而一。"在朱世杰《算学启蒙》里把今有术改为"异乘同除"门。明末徐光启译《几何原本》时，把比叫做"比例"，把比例称为"同理比例"。清初《数理精蕴》里，把今有术既叫做同理比例，又叫做正比例。《白芙堂算学丛书》中说："所有率、所求率者，举以为例之两数也。……，惟此两率者，为例已定，故今所设之数可比照以求，所以亦名比例式也。"华衡芳说："中法之异乘同除，即西法之四率比例也。"可见现今所用"比例"一名，是经由《几何原本》、《数理精蕴》演变而成的。

在印度很早就有"三率法"，印度的三率法相当于我国的今有术。当印度三率法传入阿拉伯，再由阿拉伯传入欧洲，欧洲人称它为 regula trium，仍保持三率法的名义。十七世纪的欧洲对三率法十分重视，他们与刘徽一样，把各种类型问题的解法都归结为三率法的解法。然后把成比例的四项按次序排列在一起。如意大利数学家玛金尼(G. A. Magini, 1555—1617)在《平面三角测量(De Planis Triangulis)》(1604) 里的后部第一卷第一命题第三法为：

1	2
"Vt Sinus anguli	ad sinus ang.
DBA gr. 38	BDA gr. 80
61566	98481
3	4
ita pedes 12	ad pedes $19\frac{1}{5}$
lateris AD	serc lateris AB
oppositi	oppositi

到十八世纪，欧洲数学家才逐渐把三率法写成现代的形式。即

所有率:所有数=所求率:所求数.

今有术从起源到现在是有两三千年的发展历史，它的理论与算法虽然比较简单，但是由于它是一种基本算法，所以经由印度、阿拉伯、欧洲一直流传至今，而且成为数学中一种不可缺少的算法。

参考文献

[1] 钱宝琮：《中国数学史话》，中国青年出版社，1957。
[2] 李俨：《中国古代数学史料》，上海科技出版社，1963。
[3] 李迪：《刘徽的数学思想》，《科技史文集(八)·数学史专辑》，上海科技出版社 1982。
[4] 李继闵：《〈九章算术〉中的比率理论》，本书。

《九章算术》开立方术的代数意义*

李　兆　华

《九章算术》[1]开立方术文简意赅。由于其中明确指出"复除，折而下"、"复除，折下如前"，可见，这是一个有一般性的法则。也就是说，不论立方根是多少位数，反复运用这一法则都可求出来。所以，有必要在一般情形下对这一法则加以论述。

今将开立方术的术文以及用近代符号表示筹算板上的算草对比胪列如下，然后对它的代数意义和历史价值加以说明。

"置积为实，借一算。"

实	N
借算	1

图 1

如图 1，表示方程 $X^3=N$，（N是正整数）。

"步之超二等，议所得"。

商	a_1
实	N
借算	$(10^3)^{n-1}$

图 2

* 本文曾得到内蒙师院李迪副教授的指导，谨致谢意。

设共步过$(n-1)$次，$(n\geqslant2)$，表示方根有$(n-1)+1=n$位。每步一次，借算需每乘以10^3，因此步（$n-1$）次后，借算表示$(10^3)^{n-1}$。如图 2 表示方程

$$(10^3)^{n-1}\cdot x_1^3=N \tag{1}$$

议得 $x_1\doteq\alpha_1$ 为方根的第一位数，即初商。

“以再乘所借一算为法而除之”。

商	α_1
实	$N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3$
法	$(10^3)^{n-1}\alpha_1^3$
中行	$(10^3)^{n-1}\alpha_1$
借算	$(10^3)^{n-1}$

图 3

“除已，三之为定法，复除折而下，以三乘所得数置中行，复借一算置下行，步之，中超一下超二等，复置议。”

商	$\alpha_1\alpha_2$
实	$N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3$
定法	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot10^{-1}$
中行	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot10^{-2}$
借算	$(10^3)^{n-1}\cdot10^{-3}$

图 4

如图 4，表示方程

$$(10^3)^{n-1}\cdot10^{-3}x_2^3+3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot10^{-2}x_2^2+3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot10^{-1}x_2= =N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3$$

亦即

$$(10^{n-2}x_2)^3+3(10^{n-1}\alpha_1)\cdot(10^{n-2}x_2)^2+3(10^{n-1}\alpha_1)^2\cdot(10^{n-2}x_2)=$$

$$\doteq N-(10^{n-1}\alpha_1)^3 \qquad (2)$$

其中，$10^{n-2}x_2=X-10^{n-1}\alpha_1$。以定法除实决定次商 α_2：

$$x_2 \doteq \frac{N-(10^{n-1}\alpha_1)^3}{3(10^{n-1}\alpha_1)^2\cdot 10^{n-2}} \doteq \alpha_2$$

“以一乘中，再乘下，皆副以加定法，以定法除。”

商		$\alpha_1\alpha_2$
实	$N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3-[3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+$ $+(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2]\alpha_2$	
定法	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2$	
中行	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}$	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2$
借算	$(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}$	$(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2$

图 5

“皆副”的意义是以 α_2 乘中行的数，以 α_2^2 乘最下一行的数都另外放置，即图 5 中右下角的数。

“除已，倍下，并中从定法，复除，折下如前。”（以三乘所得数置中行，复借一算置下行，步之，中超一下超二等，复置议。）

商		$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$
实	$N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3-[3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+$ $+(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2]\alpha_2$	
定法	$[3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2]\cdot 10^{-1}$	
中行	$[3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}+3(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2]\cdot 10^{-2}$	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2$
借算	$(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-3}$	$2(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2$

图 6

"倍下"的意义是将最下一行另置的数二倍。"并中"的意义是将下行另置的数二倍后与中行另置的数相加。"从定法"是将上两数相加的结果加入定法。"复除，折下如前"是决定三商时，定法一退，其它运算重复前面的步骤。

如图 6 表示方程

$$(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-3}x_3^3+[3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}+$$
$$+3(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2]\cdot 10^{-2}x_3^2+3[(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+$$
$$+2(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2]\cdot 10^{-1}x_3=$$
$$=N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3-[3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+$$
$$+3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2]\alpha_2$$

亦即

$$(10^{n-3}x_3)^3+3(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)\cdot(10^{n-3}x_3)^2+$$
$$+3(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)^2\cdot(10^{n-3}x_3)=$$
$$=N-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)^3 \qquad (3)$$

其中 $10^{n-3}x_3=X-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)$。同样地， 以定法除实，决定三商 α_3：

$$x_3\doteq\frac{N-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)^3}{3(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)^2\cdot 10^{n-3}}\doteq\alpha_3$$

……

按照开立方术，进行 $(k-1)$ 次 $(2\leqslant k\leqslant n-1)$ 减根变换，有

$$(10^{n-k}x_k)^3+3(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+$$
$$+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})\cdot(10^{n-k}x_k)^2+3(10^{n-1}\alpha_1+$$
$$+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})^2\cdot(10^{n-k}x_k)=$$
$$=N-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})^3 \qquad (R)$$

其中 $10^{n-k}x_k=X-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})$。以定法除实，决定 k 商 α_k：

$$x_R=\frac{N-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})^3}{3(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})^2\cdot 10^{n-k}}\doteq\alpha_k$$

……

注意到方根有 n 位数，且方根的各次近似值分别是：

$X_1=10^{n-1}a_1$,

$X_2=10^{n-1}a_1+10^{n-2}a_2$,

$X_3=10^{n-1}a_1+10^{n-2}a_2+10^{n-3}a_3$,

······

$X_k=10^{n-1}a_1+10^{n-2}a_2+\cdots+10^{n-(k-1)}a_{k-1}+10^{n-k}a_k$,

······

则由 $a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots$的表达式，有

$$X_k=X_{k-1}+10^{n-k}a_k$$
$$=X_{k-1}+10^{n-k}\cdot\frac{N-X^3_{k-1}}{3X^2_{k-1}\cdot 10^{n-k}}$$
$$=X_{k-1}+\frac{N-X^3_{k-1}}{3X^2_{k-1}}。$$

记 $f(X)=X^3-N=0$，则

$$X_k=X_{k-1}-\frac{f(X_{k-1})}{f'(X_{k-1})}。$$

综上所述，开立方术可归结为下列几步：

i) 首先进行倍根变换，由观察求得初商，从而求得立方根的第一次近似值 $10^{n-1}a_1$；

ii) 每求得立方根的一次近似值之后，就利用 $(a+b)^3$ 展开式的系数进行减根变换，求出一个新的方程；

iii) 在新方程中，以定法除实即用方程中的一次项系数除常数项，求出立方根的下一位数。

若方程为 $f(x)=x^3+px^2+qx+r=0$，其中 p，q 是整数，r 是负整数。

由 ii)，令 $y=x-a$，$a>0$ 是立方根中已求出的部分，则以 $x=y+a$ 代入原方程，有

$$f(y)=(y+a)^3+p(y+a)^2+q(y+a)+r=0$$

即 $$f(y)=y^3+(3a+p)y^2+(3a^2+2pa+q)y+$$

$$+(a^3+pa^2+qa+r)=0。$$

由 iii)，略去 y^3，y^2 项，求得

$$y\doteq-\frac{a^3+pa^2+qa+r}{3a^2+2pa+q}=-\frac{f(a)}{f'(a)},$$

$$\therefore\qquad x=y+a\doteq a-\frac{f(a)}{f'(a)}。$$

而这一原理，恰好是三次方程的 Newton-Raphson 解法的根据。

《九章算术》的开立方术和 Newton-Raphson 法的基本原理是相同的。区别在于，开立方术所处理的是最简三次方程，而后者则是首项系数为 1 的整系数三次方程；开立方术中包含有方程的倍根变换，后者则没有。从时间上看，开立方术比 Newton-Raphson 法要早 1600 年以上。

到十一世纪，宋代的贾宪又给出了"增乘开平方法"、"增乘开立方法"[2]。由于这种方法形式整齐、程序简便，所以到十三世纪中叶被秦九韶等人发展为求解一般高次方程正根的方法——"正负开方术"。而"正负开方术"的基本原理仍是上面指出的 i)、i)、iii)，其中 iii)在《数书九章》中称为"以方约实"。因此说，"正负开方术"与《九章算术》的开立方术是一脉相承的[3]。并且比所谓 Horner 法早 500 余年[4]。

Newton-Raphson 法（经后人改进，成为现今解高次方程的所谓 Newton 法）和 Horner 法，在方程论以及数学史上虽然都曾受到人们的重视[5]，但是，从理论上看，这两种方法与开立方术基本上是一致的；从时间上看，中国却遥遥领先于西方。因此可以说，开立方术不仅奠定了中国古代方程论的基础，而且在世界数学史上也占有重要的地位。

参 考 文 献

[1] 钱宝琮校点，《算经十书》，中华书局，1963。

[2] 杨辉，《详解九章算法》纂类，宜稼堂丛书本。

[3] 钱宝琮主编，«中国数学史»，科学出版社，重印本，1981，第 162 页。
[4] 钱宝琮，«增乘开方法的历史发展»，载«宋元数学史论文集»，科学出版社，1966，第 36 页。
[5] D. E. Smith, History of Mathematics, 1950, Vol. II. pp. 472—473. F. Cajori, A History of Mathematics, 1919, P. 203.

盈不足术探源

李 继 闵

盈不足术是我国数学史上解应用问题的一种别开生面的方法。它和方程、句股诸术同列为《九章》之一，足见其在古算中占有相当的地位。这种算法，后来在欧洲被称为"双假位法"(regula duorum falsorum, double false position)，受到特别的重视。正如钱宝琮所说："在十六、七世纪时期，欧洲人的代数学还没有发展到充分利用符号的阶段，这种万能的算法便长期统治了他们的数学王国。"①

由于盈不足术在古算中的特殊地位，因而成为数学史研究中令人感兴趣的一个课题。关于盈不足术是否起源于中国的问题，在海内外数学史家中曾引起争议，虽然现在多数学者认为"西方的双假位法可能是由中国传过去的"，但这个结论确实还需要从历史文献的深入研究中去进一步证实。

历史上任何重要的数学思想与方法都不可能是"无源之水，无本之木"，而总有其产生的实际背景和理论渊源的。那末，盈不足术是在怎样的数学历史背景下产生，又是在何种数学思想与理论的基础上发展起来的？这个问题的探讨对于了解秦汉以前古算中应用问题解法的演进以及方程术的产生都是很有价值的。

一 盈不足术产生的数学历史背景

如所周知，《九章算术》是我国秦汉以前数学成就的总结。它是一部经历了长期的历史发展而逐步完善起来的数学著作。《九

① 钱宝琮：《中国数学史话》，盈不足术。中国青年出版社。1957。

章》的篇目章次大体上反映了这一古算理论体系发展的历史进程。全书分为九章，各章的名称依次为：(Ⅰ)方田，(Ⅱ)粟米，(Ⅲ)衰分，(Ⅳ)少广，(Ⅴ)商功，(Ⅵ)均输，(Ⅶ)盈不足，(Ⅷ)方程，(Ⅸ)句股。

考察"盈不足"之前六章的内容。"方田"讲述远古时代简单的土地测算及分数算法；"粟米"是由古老的物物交换中产生的比率算法；"衰分"是由"依爵次分之"发展起来的简单的比例分配算法；"少广"乃是较为复杂的有关面积的计算；"商功"系工程计算方面的各种求积问题；"均输"则是从赋税、徭役的摊派中提出的各种复杂的分配问题。钱宝琮①曾对《九章》的二百四十六问，按问题的性质列为乘除、互换、面积、体积、句股、衰分、合率、推解、方程等九类。依钱的这一分法，《九章》的前六章凡一百八十四问，其中属"乘除"者四十问；属"互换"者四十六问②；属"面积"者二十六问；属"体积"者三十四问；属"衰分"者十八问；属"合率"者二十问。而就古算法来说，这些问题的解法大致可归结为三种：分数算法、比率算法和开方术。其中比率算法应用特别广泛，所谓互换、衰分、合率皆属此列。

率的概念与理论在《九章》的算学理论体系中起着十分重要的基础作用③。刘徽说："凡九数以为篇名，可以广施诸率"，是说率的概念与理论可以应用到《九章》的全部理论中去。在《九章》中，分数的母与子被看作是一对比率，因而各种分数算法便建立在率的理论基础之上④。从《九章》之前六章可见，比率算法不仅

---

① 见钱宝琮：《古算考源》，九章问题分类考，商务印书馆，1933。

② 钱宝琮的①中原文，"推解第八"的"十八问"应改为"十五问"；而"互换第二"的"五十三问"应为"五十六问"，其中的"Ⅵ12，16"应为"Ⅵ12—16"。

③ 参见本书《〈九章算术〉中的比率理论》一文。

④ 参看本书《中国古代的分数理论》一文。

用于各种复杂的比例问题，甚至现今算术中所谓的相遇、追及、工程之类的四则应用问题，皆用比率算法求解。例如，均输章第[二十]“凫雁相逢”题曰：“今有凫起南海，七日至北海；雁起北海，九日至南海。今凫雁俱起。问何日相逢？”

“答曰：三日、十六分日之十五。”

“术曰：并日数为法，日数相乘为实，实如法得一日。”

徽注曰：“按此术，置凫七日一至，雁九日一至。齐其至，同其日，定六十三日凫九至，雁七至。今凫雁俱起而问相逢者，是为共至。并齐以除同，即得相逢日。”

按刘徽的注释，此题的解法可表为如下的筹式变换：

$$\begin{array}{c} \\ \text{日} \\ \text{至} \end{array}\begin{array}{c} \text{雁}\quad\text{凫} \\ \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\text{齐同}} \begin{array}{c} \text{雁}\quad\text{凫} \\ \begin{pmatrix} 63 & 63 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\text{并其至为共至}} \begin{array}{c} \\ \text{日} \\ \text{至} \end{array}\begin{array}{c} \text{共} \\ \begin{pmatrix} 63 \\ 7+9 \end{pmatrix} \end{array}$$

故得凫雁俱起相逢日数为

$$\frac{63}{7+9}=\frac{63}{16}=3\frac{15}{16}(\text{日}).$$

显然，此题的解法是依据比率的齐同术。与此类似，在均输章中诸如“兔走犬追”、“五尺金箠”、“客去忘衣”等题都是巧妙地运用比率算法求解。这种情形清楚地表明，在远古时代，比率算法曾作为数学应用问题的普遍解法而在古算中“独霸天下”。

盈不足术的出现标志着古代数学有了新的突破。«九章算术»盈不足章蒐集各种应用问题二十个。依钱宝琮的主张，可分属四类，即

“互换”类，简单的比例问题(第[九]、[十五]问)；

“合率”类，分工合作问题(第[十]问)；

“推解”类：
- 盈不足本术(第[一]—[八]问)，
- 推解问题(第[十三]、[十六]、[十七]、[二十]问)，
- 蒲莞问题(第[十一]、[十二]、[十九]问)；

“方程”类，方程本术(第[十四]、[十八]问)。

但若按照问题所涉及的数量关系来划分，这些题目又可归併为两大类：

- 线性关系
  - 比例关系
    - 互换类
    - 合率类
  - 一般线性关系
    - 盈不足本术
    - 推解问题
    - 方程本术
- 非线性关系(蒲莞问题)
  - 二次关系(“良驽相逢”问题)
  - 指数关系(“蒲莞并生”、“两鼠对穿”问题)

这表明，随着生产实践的发展和理论研究的深入，数学应用问题所涉及的数量关系已远远超出了比例关系的狭隘范围。形式多样而复杂的线性问题和非线性问题的出现，使原始的比率算法已无能为力了。一方面，应用比率算法解题需要“因物成率，审辨名分，平其偏颇，齐其参差”，这对于复杂的比例问题要求很高的分析能力和技巧性；另一方面，对于“隐杂互见”的各种线性与非线性问题，使用比率算法则根本不能凑效。这便要求数学家创造一种新的有力的一般解题方法，盈不足术就是在这样的数学历史条件下应运而生的。

二　盈不足术的由来和理论根据

假设试验与推理论证是人类探索自然、寻求规律的两种相辅相成的方法。每当实际中提出的新问题使现成的理论无能为力之时，人们便自然地求助于试验；而在对试验中出现的新现象无法解释时，则又转向理论中寻找出路。数学的理论并不排斥假设试验的方法，特别是在数学理论处在幼稚时期的古代，试验的方法相对地更为重要。盈不足术就是古代数学中假设试验与推理论证

两种方法交互运用的产物。

试看“盈不足”章第[十一]问“蒲莞并生”问题：

“今有蒲生一日，长三尺。莞生一日，长一尺。蒲生日自半。莞生日自倍。问几何日而长等?”

此题若按现今的方法求解，当设 x 天蒲莞等长。于是依题意可知

蒲生 x 日之长为 $6\left(1-\frac{1}{2^x}\right)$,

莞生 x 日之长为 $-1+2^x$,

因而得方程： $-1+2^x=6-\frac{6}{2^x}$.

化简，有 $(2^x)^2-7(2^x)+6=0$,

解得 $2^x=6$, $\therefore\quad x=\log_2 6\approx 2.59$.

上面这样的超越方程问题，用古老的比率算法自然是无法解决的，于是只好求助于猜测与试验了。例如：

日　数	蒲　长（寸）	莞　长（寸）	蒲莞之差(盈、朒)
1	30	10	不足20
2	45	30	不足15
3	$52\frac{1}{2}$	70	盈$17\frac{1}{2}$

试验的目的，在于找出使莞、蒲长度之差为零的天数（即刘徽所谓的“不盈不朒之正数”）。但试验的结果只能知道所求之天数在2与3之间，而天数的奇零部分是无法通过试验得到的。

首先，需要从理论上回答蒲、莞之蔓在第二与第三天之间是按什么规律生长的？当然，在遥远的古代是难以认识这种指数规律的。从刘徽注文“又以后一日之所长，各乘日分子，如日分母而一，各得日分子之长也”来看，古代数学家是把蒲、莞在一日

内之生长当作是均匀的。这就产生了现代所谓的“直线内插法”的思想。而这种思想自然是与远古时代认为一切数量之间都存在着比例关系(“凡数相与者谓之率”)的传统数学观念是一脉相承的。

在盈不足算法中，把猜测假设的数据称为“假令”，而把用“假令”来进行检验考核的过程称为“课”①。这种考核的结果不外乎“盈”、“不足”或“适足”三种情形。通过两次假设与考核，其结果可分“盈、不足”、“两盈”、“两不足”、“盈、适足”、“不足、适足”几种情形，这样也就把一般的应用问题化成了几种基本类型的盈亏类问题。

盈不足章的前八题，以“共买物”问题为例，给出了各类盈亏问题求解的演算法则。例如，盈不足问题可表述为下面的数学模型：

今有共买物，人出 x_1(钱)，盈 y_1；人出 x_2，不足 y_2，问人数、物价各几何？

盈不足术曰：“置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并以为实。并盈、不足为法。实如法而一。有分者，通之。盈、不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数”。

这段术文实际上包含着三个公式。若以 x_0 表示每人应出钱数；A 表示人数；B 表示物价，则有公式：

$$x_0=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}, \tag{1}$$

$$A=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1-x_2}, \tag{2}$$

$$B=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}. \tag{3}$$

---

① “课”，本义是试验、考核。例如《汉书·京房传》：“房奏考功课吏法”。这里的“课”与方程中的“程”意义相近。参见本书《〈九章算术〉与刘徽注中的“方程”理论》一文。

这里的 x_0 就是实际应用问题中所要求的"不盈不朒之正数"，因此公式(1)(即直线内插公式)在应用中特别重要。

关于盈不足公式的由来，通常的数学史著述用线性方程组解法导出。这种简单化的做法未必能符合造术之原意。从直线内插法的思想基于比例关系，而术文中又将人所出钱称为所出率来看，它应是根据比率算法的原理推导出来的。其实，这在刘徽注文中早已有所解释，只是可惜文字过于简略，后人难以明瞭。今试析如下。

从徽注中的"盈朒维乘两设者欲为齐同之意"，"盈朒当与少设相通"等语来看，盈不足公式的推证当是从分析两设(x_1 和 x_2)与盈朒(y_1 与 y_2)等数量之间的比率关系入手的。如同在衰分术中那样，古人常常把问题中的有关数据按一定顺序排列起来寻求它们的比率关系。"每人出钱 x_1，买物 1，盈钱 y_1；每人出钱 x_2，买物 1，不足钱 y_2"，将它们在算板上排列成行，便是

$$\begin{matrix}\text{人出钱}\\\text{买　物}\\\text{盈　朒}\end{matrix}\begin{bmatrix}x_2 & x_1\\ 1 & 1\\ y_2(\text{朒}) & y_1(\text{盈})\end{bmatrix}$$

容易发现每行中的数可以成比例地变化，即有"每人出钱 kx_1，买物 k，盈钱 ky_1；每人出钱 $k'x_2$，买物 k'，不足钱 $k'y_2$"。这就是说上面的筹算式的每一行构成一组"率"，所以术文将所出数称为所出率。既然每行相与成率，于是便可施以"乘以散之，约以聚之，齐同以通之"的比率变换以及今有、衰分之术了。因而由齐同之术可得

$$\begin{matrix}\text{人出钱}\\\text{买　物}\\\text{盈　朒}\end{matrix}\begin{bmatrix}x_2y_1 & x_1y_2\\ y_1 & y_2\\ y_2y_1(\text{朒}) & y_1y_2(\text{盈})\end{bmatrix}$$

即有"人出钱 x_1y_2，买物 y_2，盈钱 y_1y_2；人出钱 x_2y_1，买物 y_1，

不足钱 y_2y_1”。将此两项“通计”，（即两次试验中相应的率数相并），此时盈朒之数相同而相消，故得“人出钱 $x_1y_2+x_2y_1$，买物 y_2+y_1，（不盈不朒）”。于是，由今有术便得买一物人应出之钱为$\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}$。全部演算过程可表为如下的筹式变换：

$$\begin{matrix}\text{假令}\\\text{买物}\\\text{盈朒}\end{matrix}\begin{bmatrix}x_2 & x_1\\ 1 & 1\\ y_2(\text{朒}) & y_1(\text{盈})\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{齐同术}}\begin{bmatrix}x_2y_1 & x_1y_2\\ y_1 & y_2\\ y_2y_1(\text{朒}) & y_1y_2(\text{盈})\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{通计}}\begin{bmatrix}x_1y_2+x_2y_1\\ y_2+y_1\\ (\text{不盈不朒})\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{今有术}}\begin{bmatrix}\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}\\ 1\\ (\text{不盈不朒})\end{bmatrix}$$

在上面的演算中，齐同之后的买物数、“假令”之倍数都正好是齐同之前的盈朒之值（y_1 或 y_2），因而在数值上可以相互代替①，不必重复列出，从而可以简化演算的程式。正是这样，上面的演算可以简化为以下程序：

$$\begin{bmatrix}x_2 & x_1\\ y_2 & y_1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{维乘}}\begin{bmatrix}x_2y_1 & x_1y_2\\ y_2 & y_1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{相并}}$$

$$\begin{bmatrix}x_1y_2+x_2y_1\\ y_1+y_2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{实如法而一}}\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}.$$

这就是盈不足术所说的：“置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并以为实。并盈、不足为法。实如法而一”。

---

① 盈不足术徽注有云：“据‘共买物，人出八，盈三；人出七，不足四’，齐其假令，同其盈朒，盈朒俱十二。通计齐则不盈不朒之正数，故可并以为实。并盈、不足为法。齐之三十二者，是四假令，有盈十二。齐之二十一者，是三假令，亦朒十二。并七假令合为一实，故并三、四为法”。这里的“并三、四为法”，本应是并“三物”、“四物”为“七物”作除数，由于买物数等同于假令之倍数，故注文中用“三假令”、“四假令”并为“七假令”来简单地代替。

其余的两个公式也是从比率的分析中得到的。徽注称两次假令之差(x_1-x_2)为“设差”，又称为“少设”。注文说：“盈朒当与少设相通”。是说“少设”(x_1-x_2)与盈朒之并(y_1+y_2)是成正比的。其一术又说：“盈不足为众人之差，以所出率以少减多，余为一人之差，以一人之差约众人之差，故得人数也”。即指出，少设是每人两次出钱之差；盈、不足之并是众人两次出钱之总差，它应等于少设与人数之积：

$$y_1+y_2=A(x_1-x_2),$$

故得人数

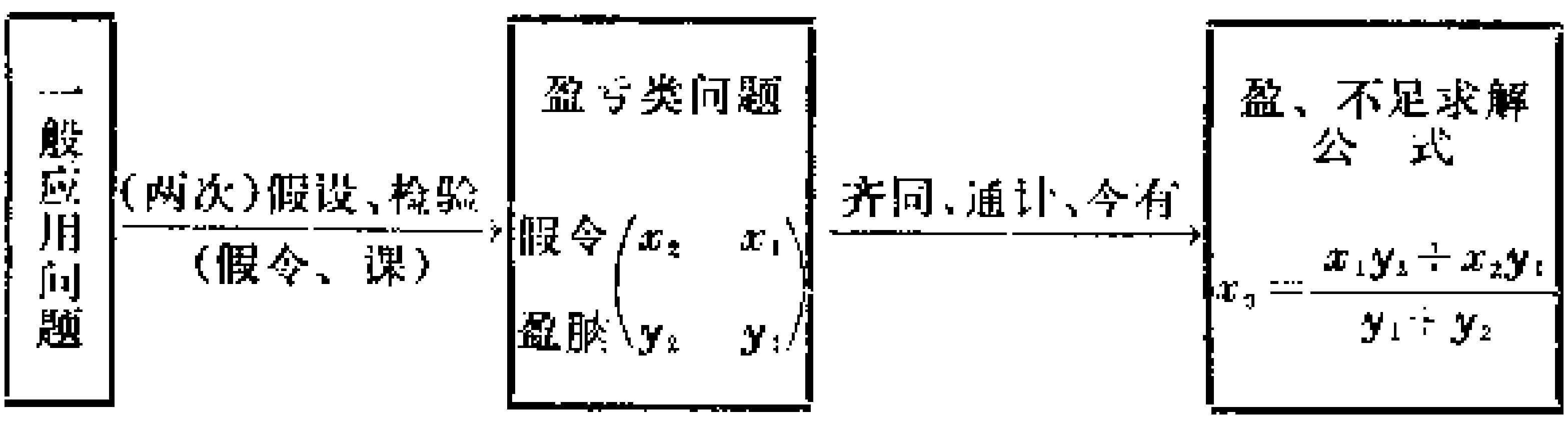
$$A=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}.$$

从而得物价

$$B=A\times x_0=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}\times\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1-x_2}.$$

盈亏类问题之其它类型的求解公式，自然类似地也由比率理论推导出来。值得注意的是，倘若引进正、负数来表示盈、朒，则各种类型的盈亏问题便获得统一的求解公式。但是《九章》的著者没有这样做，不知是何缘故？

总结盈不足算法(即“推解法”)的解题过程，可图示如下。



这个算法包括两大步骤：第一步，通过假设与检验，把各种各样的应用问题化为特定形式的盈亏问题，它实际上是数学问题的一种“模式化”的过程；第二步是盈亏问题的求解，它是基于直线内

插的思想而运用比率算法，并且将这种演算简化为固定的程序。由此可见，从古算理论的渊源来说，盈不足术是我国古老的比率算法的“推陈出新”，它无疑是我国古代独立的创造。

三　盈不足术在数学史上的意义

在古代，随着数学应用的日益广泛和数学问题的愈加复杂，寻求各类应用问题的普遍解法自然便成为古算理论研究的中心课题。盈不足术作为当时在这一方面的重大成就无疑会受到特别的珍视。

在论及盈不足术的成就时，通常仅注意到这种方法应用的极端广泛性，它给出线性问题的精确解和非线性问题的近似解，在古代确实称得起“万能”的解题方法。然而，盈不足术在数学的方法与思想方面给予古算的影响是不可低估的。以特定的数学模式代替各种数量关系的分析，这种思想与方法在我国古代数学中有着非常深远的影响，“方程”这一数学模型，便是这一思想发展的产物。而从盈不足术开始，由方程术所进一步发展的演算程序化，使我国古代筹算制度达到相当完善的水平。

考察«九章»之“方程”，其立意造术与盈不足有许多相似之处①，这表明它们有共同之本源。但以方程来解释盈不足术是不妥当的，因为无任何证据说明方程先于盈不足术而产生。相反地，说盈不足术在先似乎比较合理。其一，在«九章»中盈不足列在方程之前，这或许反映其出现之前后顺序，至少表明«九章»的著者不是用方程来解释“盈不足”的。其二、盈不足中的盈、朒具有明显的“得失相反”的意义，倘若“以正负名之”，则可将盈亏类诸求解公式统一，而«九章»中的盈不足术未能如此，这表明在盈不足术畅行之时正负术尚未问世，或者还很不成熟。其三，比较

① 参看本书«<九章算术>与刘徽注中的“方程”理论»。

方程与盈不足的立意造术，方程更为复杂，似为盈不足之发展。由是观之，虽不能完全确定盈不足先于方程，但以方程组解法推导盈不足公式，这种做法无论如何是违背历史的。

参 考 文 献

[1] 钱宝琮，«盈不足术的发展史»，«数学教学»，新知识出版社。1955,1。

[2] 李约瑟，«中国科学技术史»，卷三，第十九章，九、代数，(3) 假设法。

[3] 三上义夫著，林科棠译，«中国算学之特色»，商务印书馆，1934。

[4] 钱宝琮，«古算考源»，中华学艺社，1933。

《九章算术》与刘徽注中的“方程”理论

李　继　闵

《九章算术》中的“方程”理论是世界数学史上具有划时代意义的伟大成就。刘徽关于“方程”的注释，不仅使方程诸术得到阐发与增补，而且奠定了这一理论的基础。

从比率算法的出现，到盈不足术的问世，我国古代数学家在寻求数学应用问题的普遍解法的道路上，经过长期的探索而卓有建树。正是在这样深厚的理论积累的基础之上产生了“方程”的概念与理论，它标志着中算理论在数学问题模式化与解法程序化方面进到了一个更高的水平。

一　数学问题模式化与“方程”的概念

盈不足术通过两次“假设检验”(即刘徽所谓的“课”)，将一般的数学问题化为特定的盈亏类问题的模式

$$\begin{matrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{matrix} \begin{matrix} \text{假令} \\ \text{盈、朒} \end{matrix}$$

从而按照一定的演算程序求解①。而古算中的“方程”，按照刘徽的注释，它也是按照一定的规程进行试验考核而得的数学模式。

刘徽“方程”注云：“程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率。二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程。行之左右无所同存，且为有所据而言耳”

① 参见本书《盈不足术探源》一文。

这段文字是刘徽对"方程"概念的精辟界说。首先，刘徽解释"程"的涵义："程，课程也"。是说这里的"程"即是"课"。按"课"的本义是试验、考核，如《管子·七法》："成器不课不用，不试不藏"。而"程"也含有计量、考核的意思，如《汉书·东方朔传》："程其器能"。正是在试验与考核的意义上，"程"与"课"是相通的。由"课"将数学应用问题转化为盈亏类问题，而由"程"把问题布列为"方程"。这种问题模式化的思想与方法是一脉相承的。

"程"在数学上的具体化就是用筹在算板上列出如同"上禾三、中禾二、下禾一；实三十九"这样的竖行。所谓"群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率"。是说，把这样列出的行看作是一组"率"，即一组可以成比例变化的数。根据行中各数的实际意义，容易明瞭它们确实具有"乘以散之，约以聚之，齐同以通之"的率的特性①。因而，"程"的内容实质上是对一组率的考核。所以，宋代李籍在《九章算术音义》中解释"方程"说："方者，左右也。程者，课率也。左右课率，总统群物，故曰方程"。这种将实际问题中涉及的数量依比率关系排列成行以进行变换和演算，是从今有、衰分、盈不足诸术中承袭下来而加以发展的方法。

刘徽解释"方"的涵义："二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故曰方程"。是说"程"的次数应与"物"数相同，有几物便有几行，依行、列对齐，在算板上便布列成筹码的"方阵"，例如（为了简便，这里用阿拉伯数字代替筹码）

1	2	3	上禾
2	3	2	中禾
3	1	1	下禾
26	34	39	实

① 参看本书《<九章算术>中的比率理论》一文。

“方”，当指筹式的外形。是说由物率排成的行数与列数相等恰为方形。由此推测在古代“方程”的布列中，算板上的下“实”与上“物”之间可能有较宽的间隔，以示两者的区别。

徽注“行之左右无所同存，且为有所据而言耳”。这里的“同”，显然是指行与行的异同。两行相“同”可有两种解释：一是说两行完全一样；另一种理解是两行作为两组率，它们有相同的“势”，即对应各率成比例①。这两种解释是相通的。刘徽这句话的意思是说，“方程”中不能有两行相同或成比例，而每行中的数据都有实际的依据，并非随意臆造的。

综观刘徽关于“方程”的界说，《九章》中所谓的“方程”就是由实际“课程”而得的数码方阵

$$
\begin{array}{r}
\\
\text{头位}\\
\\
\\
\\
\text{下位}
\end{array}
\begin{array}{cccc}
\text{左行} & & \text{二行} & \text{右行}\\
a_{n1} & \cdots & a_{21} & a_{11}\\
a_{n2} & \cdots & a_{22} & a_{12}\\
\vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{nn} & \cdots & a_{2n} & a_{1n}\\
C_n & \cdots & C_2 & C_1
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
\text{物 } 1\\
\text{物 } 2\\
\\
\text{物 } n\\
\text{实}
\end{array}
$$

（这里用字母代替古算中的筹码）。它满足下述条件：

（1）方阵中的每行为一组“率”（即是一组可以成比例变化的数）；

（2）除下“实”一列外，方阵中的行数与列数相等；

（3）方阵中不能有两行相同或成比例。

剖析刘徽的“方程”定义，所谓“方程”实际上相当于现代所说的适定的线性方程组的增广矩阵。在这个定义中，特别值得注意的有两点：

其一，“令每行为率”。这和现代矩阵论中将每行定义为向量

① 参见本书《〈九章算术〉中的比率理论》一文。

颇有些类似，但又不一样。一组率可以成比例变化，因而刘徽的“方程”定义中已经蕴涵着可以对“方程”的行施行徧乘、徧除的变换法则。

其二，“皆如物数程之”和“行之左右无所同存，且为有所据而言耳”。这显然是为了保证“方程”解的适定性。这里指出“方程”有唯一组解的条件：“皆如物数程之”及“行之左右无所同存”，是非常成功的。但是，关于“方程”解的存在性却只有依靠问题的实际意义（“有所据而言耳”）。这种情形倒不完全是由于当时的理论水平不可能找出矛盾“方程”的判定准则，而更重要的是，在《九章》时代，“方程”的解仅限于正数。

二　方程诸术与比率理论

《九章》中的“方程”解法有方程术和正负术，刘徽又增添了方程新术，这反映了古代“方程”理论发展的不同阶段。而这些解法经刘徽注解，它们作为比率理论的应用与发展，获得了统一的理论基础。

（一）方程术

方程术是最早的“方程”解法，详见于《九章》“方程”第[一]问：“今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？”

“方程术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗，于右方。中、左禾列如右方。以右行上禾徧乘中行而以直除。又乘其次，亦以直除。然以中行中禾不尽者徧乘左行而以直除。左方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实。求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实。余如中禾秉数而一，即中禾之实。求上禾亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实。如上禾秉数而一，即上禾之实。实皆如法，各得一斗”。

按术文之意，在算板上布列方程且反覆对“方程”的行施行“徧乘”、“直除”的变换如下：

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&1&1\\26&34&39\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{徧乘}}\begin{bmatrix}1&6&3\\2&9&2\\3&3&1\\26&102&39\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{直除}}$$

$$\begin{bmatrix}1&&3\\2&5&2\\3&1&1\\26&24&39\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{徧乘}}\begin{bmatrix}3&&3\\6&5&2\\9&1&1\\78&24&39\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{直除}}$$

$$\begin{bmatrix}&&3\\4&5&2\\8&1&1\\39&24&39\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{徧乘}}\begin{bmatrix}&&3\\20&5&2\\40&1&1\\195&24&39\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{直除}}\begin{bmatrix}&&3\\&5&2\\36&1&1\\99&24&39\end{bmatrix}$$

然后，按下述步骤计算：

$$\text{下禾一秉之实}=\frac{99}{36}=2\frac{3}{4};$$

$$\text{中禾之实}=\frac{24\times36-99}{5}=153;$$

$$\text{上禾之实}=\frac{39\times36-99-2\times153}{3}=333;$$

$$\text{中禾一秉之实}=\frac{153}{36}=4\frac{1}{4};$$

$$\text{上禾一秉之实}=\frac{333}{36}=9\frac{1}{4}.$$

刘徽注有云：“列此，以下禾之秉数乘两行，以直除，则下禾之位去矣。各以其余一位之秉除其下实，即斗数矣”。意思是说，上面最后的演算实际上是继续对“方程”施行同样的变换：

$$\xrightarrow{\text{偏乘}}\begin{bmatrix} & & 108\\ & 180 & 72\\ 36 & 36 & 36\\ 99 & 864 & 1404\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{直除}}\begin{bmatrix} & & 108\\ & 180 & 72\\ 36 & & \\ 99 & 765 & 1305\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{偏约}}$$

$$\begin{bmatrix} & & 108\\ & 36 & 72\\ 36 & & \\ 99 & 153 & 1305\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{直除}}\begin{bmatrix} & & 108\\ & 36 & \\ 36 & & \\ 99 & 153 & 999\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{偏约}}\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \\ \frac{11}{4} & \frac{17}{4} & \frac{37}{4}\end{bmatrix}$$

不过按方程术的“徧乘”、“直除”的程序演算到底，“用算繁而不省，所以别为法，约也”。

关于“直除”变换的理论根据，刘徽的解释是：“举率以相减，不害余数之课也”。这里，“举”释作“全”、“皆”；“害”当“妨碍”讲；“课”即“程”，考核之意。这句话的意思是说，“直除”（以少行减多行）皆是对应的率相减，故由余数组成的新行，仍为与实际考核相符的一组率。自然以新行代替旧行不会改变“方程”的解，因而，这句话包含着新“方程”与原“方程”同解的意思。两组率之差仍为一组率，这很容易由率的定义推知①。事实上，设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$是两组率（成比例变化的数），且 $x_i \geqslant y_i (i=1,2,\cdots,n)$，令 $z_i = x_i - y_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则由

$$\frac{z_i'}{z_i}=\frac{x_i'-y_i'}{x_i-y_i}=\frac{kx_i-ky_i}{x_i-y_i}=k$$

可知$(z_1, z_2, \cdots, z_n)$亦是一组率。

刘徽注还指出，“徧乘”而后“直除”，这本质上就是率的“齐同”。注曰：“先令右行上禾乘中行，为齐同之意。为齐同者谓中行上禾亦乘右行也②。从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其

① 参看本书«〈九章算术〉中的比率理论»一文。

② “谓中行上禾亦乘右行也”，大典本为“谓中行直减右行也”，与齐同原意不符，今依戴震校改。

义然矣”。按比率之齐同的涵义，“齐”就是同组各率应扩大（缩小）相同之倍数，故“徧乘”就是“齐”；若“中行上禾亦乘右行”（此即盈不足术中的“维乘”①），则中、右两行上禾之数相“同”，这就是两组率的齐同。而徧乘后直除，这与维乘（互乘）后相消其结果完全相同。因而，徧乘、直除可以用率之齐同来解释；直除相消法也可用互乘相消法来代替。刘徽在“方程”第[七]问的注解中就采用互乘相消法来解“方程”。

题曰：“今有牛五、羊二，直金十两。牛二、羊五，直金八两。问牛羊各直金几何？”

徽注曰：“假令为同齐，头位为牛，当相乘左右行定。更置右行牛十、羊四、直金二十两；左行，牛十、羊二十五、直金四十两。牛数等同，金多二十两者，羊差二十一使之然也。以少行减多行，则牛数尽，惟羊与直金之数见，可得而知也。以小推大，虽四、五行不异也。”

按此术文，当演算如下：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{维乘}} \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 25 & 4 \\ 40 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{相消}} \begin{bmatrix} & 10 \\ 21 & 4 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{维乘}}$$

$$\begin{bmatrix} & 210 \\ 84 & 84 \\ 80 & 420 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{相消}} \begin{bmatrix} & 210 \\ 84 & \\ 80 & 340 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(今有术)}]{\text{徧约}} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \\ \frac{20}{21} & \frac{34}{21} \end{bmatrix}$$

于是得牛、羊一头直金之数。刘徽说：“以小推大，虽四、五行不异也。”指出互乘相消法可以应用到行数更多的“方程”求解中去。

按照刘徽的“方程”理论，“方程”的每行乃是一组率；方程术中的“徧乘直除”与“互乘相消”就是率的“齐同”。通过这种程序化

① 参见本书《盈不足术探源》一文。

的演算，使“方程”的行中之“物”逐一缺位，以至于化为行中只有一物与实相通，便可归于今有术求解。因而，在刘徽的数学理论体系中，“方程”理论乃是比率理论的应用与发展。

（二）正负术

正负术是方程术的发展。方程术施行徧乘、直除的变换使“方程”的解法程序化。但直除是以少行减多行，而这个限制常常使得方程术无法畅行。例如方程章第[三]问所得之“方程”

$$\begin{bmatrix} 1 & & 2 \\ & 3 & 1 \\ 4 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix}\text{上禾}\\ \text{中禾}\\ \text{下禾}\\ \text{实}\end{matrix}$$

便不能直除求解。正是由于这种“并减之势不得广通”与“方程”解法程序化的矛盾，导致了正、负数的产生，从而推动了方程术的发展。

徽注云：“今两算得失相反，要令正负以名之。正算赤，负算黑，否则以邪正为异”。这里的“算”是指“算子”，即筹，它表示数。是说，“正算”与“负算”是表示得失相反的数。所谓“得失相反”，是说在加、减运算中，加“正算”等于减“负算”，加“负算”等于减“正算”，即是有法则

$$a+(\pm|b|)=a-(\mp|b|).$$

这样，刘徽的正负数定义实际已蕴涵着正、负数的运算规则。

徽注又云：“凡正负所以记其同异，使二品互相取而已矣。言负者未必负于少，言正者未必正于多，故每一行之中虽复赤黑异算无伤”。这段话的意思是说，正与负只是显示数量在运算上的这种相反意义，并不一定表示数量在实际上的多与少；正与负是相对的，因而，将“方程”的每一行中的数全部变号（“互取”）不会改变“方程”的解。这里的“多”与“少”，即是赤筹或黑筹的多少（而不究其赤、黑与邪、正），这实际上就是现代所谓的“绝对值”

的大小。

数的相加、相减，在筹算中即是筹的相并、相消。因而，“同名”（“同号”）数相加即是同色筹相并，它相当于法则：

$$(\pm|a|)+(\pm|b|)=\pm(|a|+|b|).$$

同名数相减，即同色筹相消。当被减之筹“多”于所减之筹（按绝对值意义），则所余为同色筹，即相当于法则：

$$当|a|>|b|时，(\pm|a|)-(\pm|b|)=\pm(|a|-|b|).$$

相等二数相减，则两筹相消为“无”，即有法则

$$a-a=0.$$

同名两数相减，当被减之筹“少”于所减之筹（按绝对值意义），则被减之筹被完全消去后，所减之筹尚有余，这就相当于零作被减数的情形。由正、负数的定义，减“正”等于加“负”；减“负”等于加“正”，因而所余之筹应当赤黑互易，即有法则

若 $|a|<|b|,\ |c|=|b|-|a|,$

则 $(\pm|a|)-(\pm|b|)=(\pm|a|)-[(\pm|a|)+(\pm|c|)]$

$$=0-(\pm|c|)=\mp|c|=\mp(|b|-|a|).$$

至于“异名”（“异号”）之数相加、减，不能直接进行，须化为同名数相减、加。正如异色之筹不可直接相并、相消一样，刘徽认为异号之数犹如异类之物，不可相并、相消。所以他说：“以行减行当各以其类矣。其异名者，非其类也。非其类者，犹无对也，非所得减也。”这种同类之数才能比较大小和相从相消的观念，刘徽曾在合分术的注释中详述①。异分母分数要化为同分母分数才能相加、减；同样，异名数要化为同名数才能相从相消。而这种化异名为同名的依据就在于正、负数定义中的“得失相反”。即

$$(\pm|a|)+(\mp|b|)=(\pm|a|)-(\pm|b|);$$

① 参见本书《中国古代的分数理论》一文。

$$(\pm|a|)-(\mp|b|)=(\pm|a|)+(\pm|b|).$$

前者即所谓“异名相除”，它的意思是说异名数相加化为同名数相减；后者即所谓“异名相益”，意思是异名数相减化为同名数相加。

正负术中还有所谓“正无入负之，负无入正之”，即法则

$$0-(+|b|)=-|b|;\quad 0-(-|b|)=+|b|.$$

这一法则显然由正、负数定义而来。而所谓“正无入正之，负无入负之”，即

$$0+(+|b|)=+|b|;\quad 0+(-|b|)=-|b|.$$

根据“无”（“零”）与加的意义，这一法则是显然的。这里的“入”是加、减运算的统称。加(减)运算是将加（减）数（它用筹码表示）作用于被加（减）数，犹如一数“进入”它数，“入”即取此义。刘徽引而伸之为“对”，即对应之意。故《九章》中称用正负术解“方程”为“以正负术入之”。

综上所述，在《九章》时代由于推广方程术的程序化演算而引进了正负数，并建立了与现代基本相同的正负数加、减法则：

$$(\pm|a|)+(\pm|b|)=\pm(|a|+|b|);$$

$$(\pm|a|)+(\mp|b|)=\begin{cases}\pm(|a|-|b|), & \text{若}|a|>|b|,\\ 0, & \text{若}|a|=|b|,\\ \mp(|b|-|a|), & \text{若}|a|<|b|;\end{cases}$$

$$(\pm|a|)\pm(\mp|b|)=(\pm|a|)\mp(\pm|b|);$$

$$0+(\pm|b|)=\pm|b|;$$

$$0-(\pm|b|)=\mp|b|.$$

方程章的正负术是解“方程”的两条法则。其一是“同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之”。其二为“异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之”。徽注云：“然则头位同名者当用此条，头位异名者当用下条。”是说当两行的头位同名时，用前一法则(即两行相减)消去头位；当两行头位异名时，用后一法

则(即两行相加)消去头位。

徽注又云："然则可得使头位常相与异名。此条之实兼通矣。遂以二条反覆一率，观其每与上下互相取位，则随算而言耳，犹一术也"。大意是说，由于上面已经说到的正与负的相对性，"方程"每行皆可同时变号，故总可使得欲相消的两行之头位异号，而应用后一法则来解"方程"。因而，两行的相加、相减可以相互转化，本质上是同一法则。由此看来，古代的"方程"演算中可能使用过同行各率皆变号的法则，它相当于用－1徧乘该行。

《九章》中的正负术术文只讲到行与行的加、减，而未论及行的徧乘。但方程章第［八］问徽注中却有徧乘正负相杂之行的演算。依该题术文列得"方程"

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ -600 & & 1000 \end{bmatrix}\begin{matrix} \text{牛} \\ \text{羊} \\ \text{豕} \\ \text{钱} \end{matrix}$$

注意此"方程"之左行，它可以看作同行各率变号的例证。徽注有云："设欲以此行如方程法，先令牛二徧乘中行，而以右行直除之"，可见刘徽已将徧乘而后直除的方程术算法推广到正负术之中。这里必然用到正负数的相乘，用正数徧乘一行的法则是显而易见的(或者说是自明的)。加之又有行中各率变号的法则，这样实际上在"方程"的解法中已包括了用正、负数徧乘的法则。

正负术不仅将方程术所规定的演算程序畅行无阻，而且允许所列"方程"有正负相杂之行，扩大了方程的应用范围。从比率理论的观点来看，正负术把率的概念与算法推广到正负数的领域，因而也可以说是率的概念与理论的发展。

（三）方程新术

方程新术是刘徽对于"方程"解法的创新。这种方法与方程旧

术之不同，在于它先消去下“实”，再转向消“物”，以寻求各“物”之比率，从而用今有衰分之术求解。这一方法具有更为浓厚的比率理论的色彩。

方程新术曰：“以正负术入之。令左右相减，先去下实，又转去物位，求其一行二物正负相借者，易其相当之率。又令二物与他行互相去取，转其二物相借之数，即皆相当之率也。各据二物相当之率，对易其数，即各当之率也。更置减行及其下实，各以其物本率今有之，求其所同，并以为法。其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余以为法。以下实为实。实如法，即合所问也。一物各以本率今有之，即皆合所问也。率不通者齐之。”

刘徽继以方程章第[十八]问为例详述这一解法。其演算主要步骤如下：先列“方程”

	左行	四行	三行	二行	右行	
头位	1	2	3	7	9	麻
	3	5	5	6	7	麦
	2	3	7	4	3	菽
	8	9	6	5	2	荅
	5	4	4	3	5	黍
下位	95	112	116	128	140	钱(实)

用直除法先消去下实，得

左	四	三	二	右	
91	−26	23	−25	−26	麻
12	5	−3	6	7	麦
−372	−109	94	−124	−137	菽
317	93	−80	101	107	荅
20	4	−5	3	5	黍
		1			钱

废去第三行，然后消去左行麻、麦、黍之数，得

	左	四	二	右
麻		−1		
麦		−3	5	2
菽	−5	3		−3
荅	3	2	−4	−1
黍				1

由左行得“菽五当荅三”，即菽荅相当之率为 菽:荅＝5:3。又消去右行中麦、菽之数，得

	左	四	二	右
麻		−1		
麦		−3	1	
菽	−5	3	6	
荅	3	2	−2	−6
黍			−2	5

由右行得荅黍相当之率，荅:黍＝5:6。再消去第二行中的荅、菽之数，乃得

	左	四	二	右
麻		−1		
麦	1	1	3	
菽	−3	1	−4	−2
荅	1			
黍				1

由第二行得麦菽相当之率，麦:菽＝3:4。最后，消去第二行菽、荅、黍之数，得

$$\begin{array}{cccc|l} 左 & 四 & 二 & 右 & \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} & -1 & -4 & \\ 1 & 1 & 7 & \\ -3 & 1 & & -2 \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 麻 \\ 麦 \\ 菽 \\ 荅 \\ 黍 \end{matrix}$$

于是由第二行又有麻麦相当之率，麻:麦＝4:7。由物价与物数成反比，"对易其数"，便得

麻价:麦价:菽价:荅价:黍价

$=7:4:3:5:6.$

此即术文所谓的"各当之率"。由此，麻与麦、菽、荅、黍相当之率为

麻:麦＝4:7；麻:菽＝3:7；

麻:荅＝5:7；麻:黍＝6:7。

在原"方程"中，以第四行减第三行，便得

"麻一斗，菽四斗正，荅三斗负，下实四正"。此即所谓的"减行"。据今有术，由上已得麻与菽、荅相当之率，得

$$菽四斗应换麻之斗数=\frac{3\times4}{7}=\frac{12}{7},$$

$$荅三斗应换麻之斗数=\frac{5\times3}{7}=\frac{15}{7}.$$

将"减行"中菽、荅之数同以麻数换之，并以正负术相加、减，得

麻 数$=1+\frac{12}{7}-\frac{15}{7}=\frac{4}{7}$(斗)，即麻$\frac{4}{7}$斗值钱 4，由今有术得

$$麻一斗值钱=4\times\frac{7}{4}=7.$$

由麻、麦、菽、荅、黍等物价之"通率"，据今有术便可求得各物一斗之价。

"其一术曰：置群物通率为列衰，更置减行群物之数，各以

其率乘之，并以为法。其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余为法。以减行下实乘列衰，各自为实。实如法而一，即得。”

这里，刘徽将衰分术推广而获得方程的一种新解法。①设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为一组率，令 $y=\sum_{k=1}^{n} b_k x_k$，(b_k 为常数，可正可负，$k=1, 2, \cdots, n$)。则$(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ 亦是一组率。

给定$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的一组值：

$$x_k' = a_k \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

则 y 的对应值为 $y' = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k$。即$(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$有一组值$(a_1, a_2, \cdots a_n, y')$。

若要使 y 取定值 c，$y=c$，则依今有术，得$(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$的一组率值是

$$\left(\frac{a_1 \times c}{y'}, \frac{a_2 \times c}{y'}, \cdots, \frac{a_n \times c}{y'}, c\right).$$

由此，若令

$$x_k^* = \frac{a_k \times c}{y'} = \frac{a_k c}{\sum_{k=1}^{n} b_k a_k}, \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

则这组$\{x_k^*\}$满足：

$$\begin{cases} x_1 : x_2 : \cdots : x_n = a_1 : a_2 : \cdots : a_n, \\ \sum_{k=1}^{n} b_k x_k = c. \end{cases}$$

---

① 参看本书<《九章算术》中的比率理论>一文。

在上述方程章第[十八]问中，当已求得

$$x_1:x_2:x_3:x_4:x_5=7:4:3:5:6$$

时，取"方程"中任意一行，例如第三行，便得 $b_1=3$，$b_2=5$，$b_3=7$，$b_4=6$，$b_5=4$，$c=116$。于是 $y^*=\sum_{k=1}^{n}b_k a_k=3\times7+5\times4+7\times3+6\times5+4\times6=116$。故得"方程"的解：

$$麻价=x_1^*=\frac{a_1\times c}{y^*}=\frac{7\times116}{116}=7,$$

$$麦价=x_2^*=\frac{a_2\times c}{y^*}=\frac{4\times116}{116}=4,$$

$$菽价=x_3^*=\frac{a_3\times c}{y^*}=\frac{3\times116}{116}=3,$$

$$荅价=x_4^*=\frac{a_4\times c}{y^*}=\frac{5\times116}{116}=5,$$

$$黍价=x_5^*=\frac{a_5\times c}{y^*}=\frac{6\times116}{116}=6.$$

倘若取上述"减行"，则 $b_1=1$，$b_2=0$，$b_3=4$，$b_4=-3$，$b_5=0$，$c=4$，则

$$y^*=\sum_{k=1}^{n}b_k a_k=1\times7+4\times3+(-3)\times5=4,$$

代入 x_k^*，求得相同的结果。

刘徽的方程新术，是由方程术之消元法获得各"物"之"通率"，然后用古老的比率算法求解。所谓"新术"，实为古算之传统方法的衍化。刘徽提出这一方法，可能是在探索方程术与比率理论的关系中获得的。这与他企图将方程诸术纳入比率算法从而建立统一的古算理论体系的思想分不开的。

三　关于古算"方程"理论研究中几个问题的讨论

在刘徽的"方程"理论中，何以要用率的概念与方法来解释"方程"及其诸术，这是一个值得深究的问题。这个问题的实质是：中国古代的"方程"理论是以数量的比率关系为依据，还是以等量关系为出发点？近代的方程理论是以等量关系为基础的，方程即是"含有未知量的等式"。那末，在数学的观念上，古代"方程"中的行是作为"由多项未知量和一个已知量所组成的等式"，还是看作一组可以成比例变化的数(即率)？

与此相关的另一个问题是，倘若古算"方程"中的行在观念上即是含有未知量的线性等式，那末，为何在《九章》中未见有实质上属于"含有一个未知量的线性等式"的讨论？值得注意的是，在《九章》的数学理论中似乎特别倚重数量间的比率关系，对于等量关系反而不太注重。例如，粟米章第[三十三]问："今有出钱一万三千五百，买竹二千三百五十箇。问箇几何？"从等量关系看此属 $ax=b$，即现今所谓一元一次方程问题；而《九章》著者却将其列入"粟米"，用今有术解之。这种考虑显然是基于数量间的比率关系。

如前所述，正负数的引进是为了使方程术的演算程序畅行无阻，而"方程"的解仅限于正数。假若我国古代的"方程"研究是从等量关系出发，那末正负数的引进则是完全可以避免的。事实上，保持等式两端各项皆为正值同样可以进行加、减消元。例如，由方程章第[三]问列得线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y=1 & (1) \\ 3y+z=1 & (2) \\ x+4z=1 & (3) \end{cases}$$

用 $3\times(1)$，再于等式两端同加以 z，得

$$6x+3y+z=z+3, \tag{4}$$

(4)—(2)，得

$$6x=z+2, \tag{5}$$

于(5)两端同加以 24 z，得

$$6x+24z=25z+2, \tag{6}$$

由 6×(3)，得

$$6x+24z=6, \tag{7}$$

比较(6)与(7)，得

$$25z+2=6,$$

于是，同样消去 x，y 而求出方程组的解。当然，这种算法比较繁琐，而且要在筹算板上表出两端均有多项的等式将会复杂得多。但是，这些仅仅是技术性的困难，它与正负数的引进所必然遇到的观念上的障碍是不可相提并论的。然而，我国古代数学家却遥遥领先地发明了正负数及其运算法则。这种情形，大概只能归之于我国古代的"方程"理论与西方有着不同的根据。由此看来，刘徽用率的概念来定义"方程"，决不是他对比率理论的偏爱，而是反映了"方程"理论是从数量间的比率关系的探讨而引导出来的。这和现代建立在等量关系基础上的方程论是异其途趣的。

如果上面的说法不谬，那末中算的代数学理论体系便与近代或西方的代数学体系迥然不同。近代的方程论以"含有未知量的等式"的概念，将线性方程、高次方程以及超越方程连成一个体系。而我国古代数学的高次方程数值解法(即开方术)与"方程"诸术，在概念与方法上都没有多少共同之处。因而，将开方术与"方程"理论归併在一起的做法是值得商榷的。

关于互乘相消法，清代钱大昕认为"夕桀"即是互椉(乘)的误文，从而推断互乘相消法在汉魏时期已成为一个数学科目。此说颇值得怀疑。互乘相消在刘徽之前早已有之。正如刘徽的分析，

互乘相消与遍乘直除，实质上都是率的齐同，用“互乘”代替“直除”乃是顺理成章之事，在理论上无所建树。而在筹算中采用互乘相消并不总比直除法简便。因为在算板上用筹作行的偏乘比筹的相并、相消复杂得多。大概正是因为如此，互乘相消法在筹算中并不常用，而只是到明朝珠算盛行，筹算法废弃不用，当时的数学家解“方程”的演草须用笔记，才普遍应用互乘相消法。①这种情形与筹算求最大公约数采用“更相减损术”(即辗转相减法)，而不用辗转相除法是十分相似的。由是观之，互乘相消法在古算法中无论就理论或实用的意义来说，都没有什么特殊的价值，以它作为数学的一个科目实在是不大可能。

关于《九章》中正负术的术文，通常仅被认作是正负数的加、减运算法则。因而认定在《九章》时代，我国仅有正负数加、减法则。这种说法是欠妥的。如前所述，正负术是方程术的发展，它将方程术中偏乘、直除与互乘相消的演算程序推广到正负数的范围，因而正负数的乘、除运算将是不可避免的。事实上，方程章第[八]问按徽注演算便用到正负数相乘。方程章“正负术”的术文，是作为“方程”的行的演算法则提出来的，将它释为正负数的加、减法则便不够全面。大概由于用正数偏乘行的法则是自明的，正负术中未作为法则列出。但不能因此说《九章》中未有正负数的乘、除运算。当然，关于正负数乘、除运算法则的完整叙述是见载于元代朱世杰的《算学启蒙》。

方程章第[十三]问“五家共井”被公认为《九章》中不定“方程”的一例。而据刘徽关于“方程”的定义，所谓“方程”，它的解皆是适定的。这个矛盾作何解释？

考察此问。题曰：“今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，如丙一绠；丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，

---

① 参看钱宝琮：《中国数学史话·方程》，中国青年出版社，1957。

如戊一绠；戊六绠不足，如甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮。问井深、绠长各几何?”

“答曰：井深七丈二尺一寸。甲绠长二丈六尺五寸，乙绠长一丈九尺一寸，丙绠长一丈四尺八寸，丁绠长一丈二尺九寸，戊绠长七尺六寸。”

“术曰：如方程，以正负术入之。”

徽注曰：“此率初如方程为之，名各一逮井。其后，法得七百二十一，实七十六，是为七百二十一绠而七十六逮井。而戊一绠逮井之数定，逮七百二十一分之七十六。是故七百二十一为井深，七十六为戊绠之长，举率以言之。”

按术文及徽注，当列“方程”如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 2 \\ & & & 3 & 1 \\ & & 4 & 1 & \\ & 5 & 1 & & \\ 6 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \\ \text{丁} \\ \text{戊} \\ \text{井深(逮)} \end{matrix}$$

这里以甲、乙、丙、丁、戊各绠为“物”；而以井深为“实”，记为“一逮井”(意为从井面至水面的距离)。按正负术演算得

$$\begin{pmatrix} & & & & 2 \\ & & & 3 & 1 \\ & & 4 & 1 & \\ & 5 & 1 & & \\ 721 & 1 & & & \\ 76 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \\ \text{丁} \\ \text{戊} \\ \text{井深} \end{matrix}$$

由左行知戊 721 绠相当 76“逮井”，依今有术得戊 1 绠 $=\frac{76}{721}$“逮井”。同样可得甲、乙、丙、丁一绠逮井之数。令井深(1 逮井)

为 721 尺，于是得各绠之长。刘徽正确指出这组答案是"举率以言之。"是说，这组数同扩大或缩小若干倍也是"方程"的一组解。自然是说这"方程"之解不定。按此"方程"满足"皆如物数程之"和"行之左右无所同存"的要求，何以会解不定？显然是由于"方程"中的"实"(井深)并非已知的缘故。出现此种情形是否说明在《九章》的"方程"理论中并没有明确的未知数和已知数的概念，或者说"方程"的行并不表示"由多项未知量和一个已知量所组成的等式"？

*　　　　*　　　　*

刘徽在其《九章算术注原序》中说："事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本榦者，知发其一端而已。"在刘徽看来，我国古代数学理论犹如一棵枝繁叶茂的大树，虽然分枝众多，却构成一个完整的体系，各种方法与理论之间有其内在的联系和共同的本源。刘徽以率的概念为根本，建立了今有、衰分、盈不足以及"方程"诸术统一的理论基础，这确实表现了我国古代数学家卓越的理论创造能力。

参 考 文 献

[1] 钱宝琮，《中国数学史》，科学出版社，1964。
[2] 钱宝琮，《方程算法源流考》，《学艺彙刊》(15)，《古算考源》，商务印书馆，1933。
[3] 杜石然，《<九章算术>中关于"方程"解法的成就》，《数学通报》，1956。
[4] A. П. 尤什凯维奇，《中国学者在数学领域中的成就》，《数学进展》，1956。
[5] 许莼舫，《中算家的代数学研究》，中国青年出版社。
[6] 李继闵，《<九章算术>中的比率理论》，本书。
[7] 李继闵，《盈不足术探源》，本书。

刘徽对极限理论的应用

白 尚 恕

关于极限的观念，早在刘徽之前的春秋战国时代就已经产生了。刘徽可能根据这些论说在理论上、方法上加以整理、扩充，并首先创造性地应用在数学上。在《九章算术》的注释里，刘徽曾多次使用了极限观念及其理论，正确地解决了一些疑难的数学问题，成为刘徽学术上的重要组成部份。

一 春秋战国时期的极限学说

在春秋战国时期，由于各种学说的创立，形成了一个百家争鸣的局面，不止有唯心主义的学说，也有朴素的唯物主义学说，还有不少关于逻辑学、物理学、天文学以及数学的片断记载。在《庄子·天下篇》里就记载着惠施关于数学的一些论说。

如"一尺之棰，日取其半，万世不竭。"这句话的大意是：一尺长的木棒，每天截取其前一天所剩余的一半，这样截取，一万年也取不够一尺长。若用近代符号表示，则得：

1 天共取 $S_1=a_1=\frac{1}{2}$,

2 天共取 $S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$,

3 天共取 $S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$,

…… ……,

n 天共取 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}.$$

惠施所说的"万世"并不是意味着一万年，我们应该理解为适当大的有限数。因此，上述的意思就是：

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1,$$

其实际意义乃是：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

原文过于简略，虽然没有说明截取方法，但是，不拘由一端往另一端截取（图 1 ）或由两端交迭截取（图 2 ），上述式子是不受影响的。

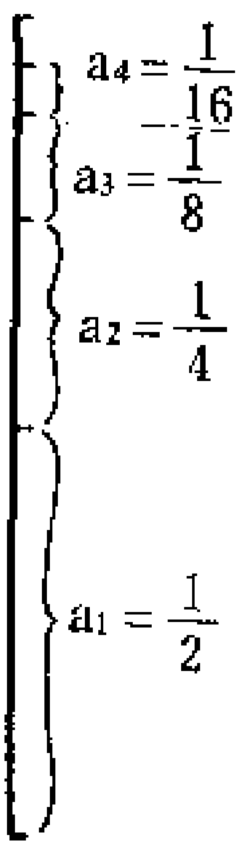


图 1

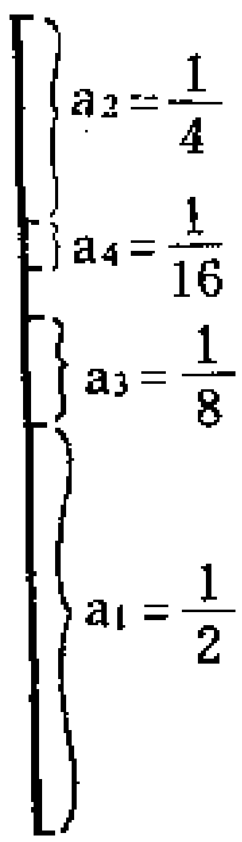


图 2

因原文是"日取其半"，故知这话的原意是指"取"，并不是指

"余"。而"万世不竭"也是指"取"，不是指"余"。又因"万世"是日期的共数，不是日期的序数。同时，"不竭"是针对"一尺之棰"来说的，不是指每日所取来说的。所以，"万世不竭"应理解为"万世"共取之数不足一尺，不当理解为：第"万世"那一天所取不为零的意思。

在"一尺之棰"的截取过程中，虽然逐日所取为：

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{2^2},\quad a_3=\frac{1}{2^3},\quad \cdots,\quad a_n=\frac{1}{2^n};$$

逐日所余也为：

$$r_1=\frac{1}{2},\quad r_2=\frac{1}{2^2},\quad r_3=\frac{1}{r^3},\quad \cdots,\quad r_n=\frac{1}{2^n};$$

但是，"万世不竭"既不应理解为逐日所取之数，也不应理解为每次剩余之数。

总上所述，"一尺之棰，日取其半，万世不竭"当是"万世"共取之数不足一尺。用现代术语来说，就是下面数列

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{2^2},\quad a_3=\frac{1}{2^3},\quad \cdots,\quad a_n=\frac{1}{2^n},$$

和的极限。

此外，在《庄子·天下篇》里还有一些极限观念的学说，如"至大无外谓之大一"，"至小无内谓之小一"。又如《墨经》里，也有些极限观念的学说，［经］"非半弗斮则不动，说在端。"［说］"非：斮半进前取也，前则中无为半，犹端也。前后取则端中也。斮必半，毋与非半，不可斮也。"其中"非"可能是"箠"字的误文，"箠"即是"棰"。"斮"就是分割的意思。大意是：如果一半一半地取棰，势必取到不可再分割的"端"。如按"进前取"的方式取棰，"端"就在棰的端，如按"前后取"的方式取棰，"端"就在棰的中间。可见，在春秋战国时代，由生产实践逐渐形成了一些片断的极限观念的论说。

刘徽可能继承并发扬了这些学说，第一个创造性地把极限观念应用到数学中去，从而解决了一些数学疑难问题。

二　极限在割圆术的应用

刘徽在《九章算术》的注文里，多次使用了极限的观念及其理论。他首先应用到割圆术里。他说："又按为图，以六觚之一面乘半径，因而三之，得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚之一面乘半径，因而六之，则得二十四觚之幂。"他进一步说："割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。"刘徽是用筝形的面积和，求得圆内接正多边形的面积，当正多边形边数倍增时，从而求得圆面积。用近代符号表示，即：

$$S_{3\cdot 2^n}=\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}+\cdots+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}$$

$$=3.2^{n-2}\cdot a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r.$$

又因　　$S-S_{3\cdot 2^n}>0$，且 $S-S_{3\cdot 2^n}\to 0$，

故得：

$$\lim_{n\to\infty}S_{3\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}+\cdots+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}3\cdot 2^{n-2}\cdot a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r=S.$$

其中 $S_{3\cdot 2^n}$ 为内接正 3.2^n 边形面积，$a_{3\cdot 2^{n-1}}$ 为内接正 3.2^{n-1} 边形一边，r 为圆半径，S 为圆面积。

刘徽还说："以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂。"这虽是以图形验证上式，但是，在上式中可得：

$$\lim_{n\to\infty}S_{3\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}\right)=r\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}+\cdots+\right.$$

$$+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}\Big)=r\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\cdot 2^{n-1}\cdot a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}\right)=r\cdot\frac{C}{2}=S.$$

这就是说，刘徽根据极限思想，利用正多边形面积推求圆面积的同时，也证明了圆田术："半周半径相乘得积步。"其中C为圆周，半周即是：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}+\cdots+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\cdot 2^{n-1}\cdot a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}\right)=\frac{C}{2}.$$

刘徽又说："觚面之外，犹有余径。以面乘余径，则幂出弧表。若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径。表无余径，则幂不外出矣。"这是说，以内接正多边形的周乘余径之积，与正多边形面积相加之和，则大于圆面积。当边数倍增时，正多边形与圆合体而无余径，无余径，其面积之和则不大于圆面积。这也是极限证法。即：

$$S_{3\cdot 2^n}+D_{3\cdot 2^n}=\Big[\left(\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}+\cdots+\frac{a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r}{2}\right)+$$

$$+\left(a_{3\cdot 2^n}\cdot r_{3\cdot 2^n}+a_{3\cdot 2^n}\cdot r_{3\cdot 2^n}+\cdots+a_{3\cdot 2^n}\cdot r_{3\cdot 2^n}\right)\Big]$$

$$=3\cdot 2^{n-2}\cdot a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r+3\cdot 2^n\cdot a_{3\cdot 2^n}\cdot r_{3\cdot 2^n}>S,$$

故得：

$$\lim_{n\to\infty}(S_{3\cdot 2^n}+D_{3\cdot 2^n})=S.$$

其中$r_{3\cdot 2^n}$为内接正$3\cdot 2^n$边形的余径，$D_{3\cdot 2^n}$为正$3\cdot 2^n$边形的周乘余径之积。

在上式推导过程中，刘徽虽然也说"觚之细者，……，则表无余径。"但因他是重点推证圆面积，所以对觚的一面、余径等未必用极限考虑。这里便不讨论了。

三　极限在弧田术的应用

《九章算术》的弧田术为："以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一。"由于这种算法误差较大，刘徽便创造了新的算法，用极限

思想推证其面积。他说："宜依句股锯圆材之术，以弧弦为锯道长，以矢为锯深，而求其径。既知圆径，则弧可割分也。割之者半弧田之弦以为股，其矢为句，为之求弦，即小弧之弦也。以半小弧之弦为句，半圆径为弦，为之求股，以减半径，其余即小弧之矢也。割之又割，使至极细。但举弦矢相乘之数，则必近密率矣。"

设弓形的弦、矢分别为 a_1、h_1，逐次分割弓形的弧，求出每一小弧所对应的弦、矢，分别设为 a_2、h_2；a_3、h_3；$\cdots$；a_n、h_n；每个弧上所对应的等腰三角形面积为：

$$\Delta_1=\frac{1}{2}a_1h_1,\quad \Delta_2=\frac{1}{2}a_2h_2,\quad \Delta_3=\frac{1}{2}a_3h_3,\quad \cdots,$$

$$\Delta_n=\frac{1}{2}a_nh_n.$$

这些三角形面积之和设为 S_n，就是

$$\begin{aligned}S_n&=\Delta_1+2\cdot\Delta_2+2^2\cdot\Delta_3+\cdots+2^{n-1}\cdot\Delta_n\\&=\frac{1}{2}a_1h_1+2\cdot\frac{1}{2}a_2h_2+2^2\cdot\frac{1}{2}a_3h_3+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2}a_nh_n,\end{aligned}$$

其中 $b_{i+1}=\sqrt{\left(\frac{b_i}{2}\right)^2+h_i^2}$，$h_{i+1}=r-\sqrt{r^2-\left(\frac{b_{i+1}}{2}\right)^2}$，

$$r=\frac{1}{2h_1}\left[h_1^2+\left(\frac{b_1}{2}\right)^2\right],\ (i=1,\ 2\cdots,\ n).$$

刘徽所说的"细"，是粗的相对概念，"极"是顶峰的意思。"极细"实际就是割圆术所说"不可割"的意思，而"使至极细"相当于"以至于不可割"。故知刘徽在这里也是用极限观念推证弓形面积算法的。即：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_1h_1+2\cdot\frac{1}{2}a_2h_2+2^2\cdot\frac{1}{2}a_3h_3+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2}a_nh_n\right)=S.$$

之后，刘徽又说："但举弦矢相乘之数，则必近密率矣。然于算数差繁，必欲有所寻究也。若但度田，取其大数，旧术为约耳。"大意说，若以全部弦、矢进行计算，则可求得较精密的近似值，不过计算比较繁杂就是了。如以度田，原术还是比较简略的。可见刘徽既给出弓形面积的精密算法，又给出了近似值的求法。弓形面积的精密算法实际就是极限思想的应用。

四　极限在开方术的应用

《九章算术》开方术说："若开之不尽者，为不可开，当以面命之。"这就是说，凡开不尽的数，可"以面命之"。"以面命之"就是以余数表示，即

$$\sqrt{A^2+r}=A\cdots r.$$

其中(A^2+r)为被开方数，A为其平方根的近似值，r为开方不尽的余数。

在古代，为了表示开方不尽数的值，一般常用的方法是加借算命分和不加借算命分。

这两种表示方法并不是理想的方法，所以刘徽说："令不加借算而命分，则常微少。其加借算而命分，则又微多。其数不可得而定。故惟以面命之，为不失耳。"就是说只有

$$\sqrt{A^2+r}=A\cdots r,$$

没有误差。但是由于这种表示法不够具体，于是刘徽利用极限思想创立了十进分数的表示法。

他说："不以面命之，加定法如前，求其微数。微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细。则朱幂虽有所弃之数，不足言之也。"这就是：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(A+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\right)$$

$$=\sqrt{A^2+r},$$

其中 A 为整数，a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n 是平方根的十进分数的分子，都是一位整数。而 $S_n=A+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}$。

有人用准确到小数第 n 位的平方根数表示平方根的近似值。仅就形式而论，这种表示法恐难符合刘徽注文的原意。

如取其近似值，则得：

$$\sqrt{A^2+r}\doteq A+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10_3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n},$$

或
$$\sqrt{A^2+r}\doteq S_n.$$

因为古代是用正方形来解释开平方的，所谓"朱幂"相当于被开方数与近似平方根的平方之差。用现代符号表示，即：

即
$$(A^2+r)-S_n^2,$$

或
$$(A^2+r)-\left(A+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\right)^2.$$

由于 $[(A^2+r)-S_n^2]\to 0$，所以刘徽说："朱幂虽有所弃之数，不足言之也。"实际上，这就是极限观念在开方方面的应用。

五　极限在阳马术的应用

对于三度相等的阳马、鳖臑体积算法，可以用"棊"加以说明，对于三度不等的阳马、鳖臑体积算法，则不便用"棊"来说明。如刘徽说："鳖臑殊形，阳马异体。然阳马异体，则不可纯合。不纯合，则难为之矣。"

为了推导三度不等的阳马、鳖臑体积算法，刘徽创立了新法：取三度分别为 a、b、c 的一个堑堵，斜截堑堵得一阳马与一鳖臑（图 3），阳马标以黑色，鳖臑标以赤色。如能证明阳马与鳖臑体积之比为 2:1，由堑堵体积算法 $\frac{abc}{2}$，易于证得阳马、鳖

臑的体积算法分别为：

$$\frac{abc}{3}, \quad \frac{abc}{6}.$$

为此，过堑堵三度的中点作截面，把黑阳马（由堑堵斜解出的阳马）分割成一个小黑长方(A_1)，两个小黑堑堵(B_1，B'_1)，两个小黑阳马(C_1，C'_1)；把赤鳖臑(由堑堵斜解出的鳖臑)分割成两个小赤堑堵(D_1，D'_1)，两个小赤鳖臑（E_1，E'_1)。由黑阳马所得的两个小黑堑堵（B_1，B'_1)与由赤鳖臑所得的两个小赤堑堵(D_1，D'_1)可合成两个半赤半黑的小长方（设为 B_1 与 D_1，B'_1 与 D'_1)；由黑阳马所得的两个小黑阳马(C_1,C'_1)与赤鳖臑的两个小赤鳖臑（E_1，E'_1）可合成两个半赤半黑的小堑堵（设为 C_1 与 E_1，C'_1 与 E'_1)，更可合成一个小长方；连同黑阳马的小黑长方（A_1）共有四个小长方。在这四个小长方中，除由两个小黑阳马（C_1，C'_1)与两个小赤鳖臑(E_1，E'_1)所合成的小长方体积不便计算外，其余三个小长方的体积是可以计算的。即

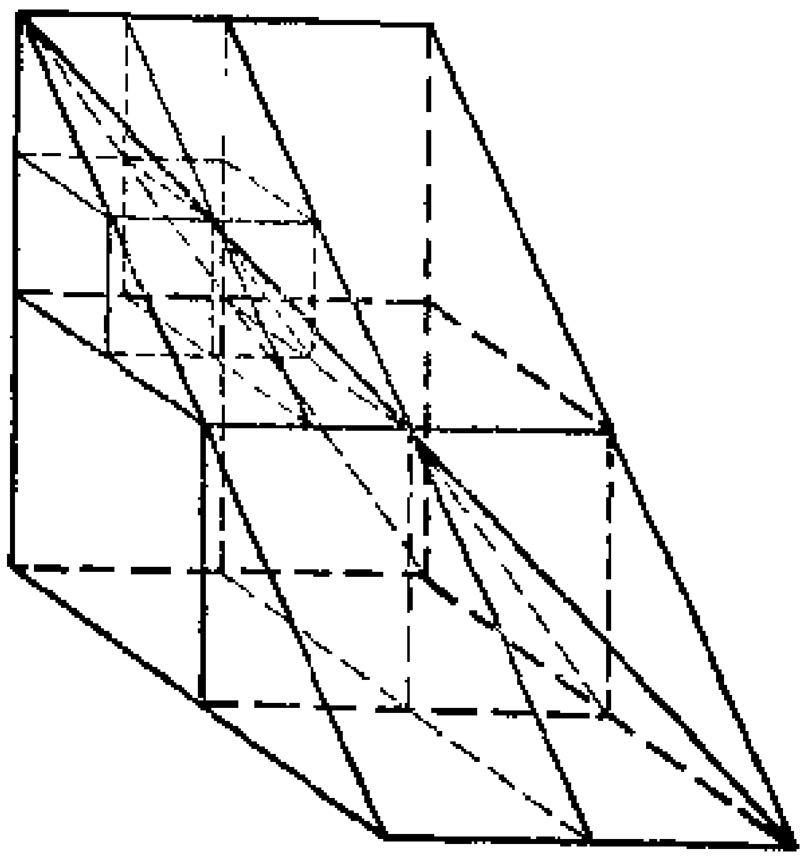


图 3

$$A_1=\frac{abc}{2^3}, \quad B_1+D_1=\frac{abc}{2^3}, \quad B'_1+D'_1=\frac{abc}{2^3}.$$

$\left(\text{其中} \quad B_1=D_1=B'_1=D_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{abc}{2^3}\right)$所以刘徽说："若为数而穷之，置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也。"在这三个小长方中，可以看出，属于黑阳马的体积与属于赤鳖臑的体

积之比为 2:1，故得原来壍堵体积为：

$$\frac{abc}{2}=[(A_1+B_1+B'_1)+(D_1+D'_1)]+[(C_1+E_1)+(C'_1+E'_1)]$$

$$=\left[2\cdot\frac{abc}{2^3}+\frac{abc}{2^3}\right]+2(C_1+E_1).$$

（其中 $C_1=C'_1$，$E_1=E'_1$）。仿照上法，将两个小黑阳马（C_1，C'_1）与两个小赤鳖臑（E_1，E'_1）所合成的两个半赤黑的小壍堵（设为 C_1 与 E_1，C'_1 与 E'_1），继续分割下去，便得：

$$\frac{abc}{2}=\left[\left(2\cdot\frac{abc}{2^3}+2^2\cdot\frac{abc}{2^6}+2^3\cdot\frac{abc}{2^9}+\cdots+2^n\cdot\frac{abc}{2^{3n}}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{abc}{2^3}+2\cdot\frac{abc}{2^6}+2^2\cdot\frac{abc}{2^9}+\cdots+2^{n-1}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{abc}{2^{3n}}\right)\right]+2^n(C_n+E_n).$$

于是刘徽说："半之弥少，其余弥细。至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉。数而求穷之者，谓以情推，不用筹算。"根据刘徽所说，设

$$S_n=\left(2\cdot\frac{abc}{2^3}+2^2\cdot\frac{abc}{2^6}+\cdots+2^n\cdot\frac{abc}{2^{3n}}\right)+$$

$$+\left(\frac{abc}{2^3}+2\cdot\frac{abc}{2^6}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{abc}{2^{3n}}\right),$$

则得：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(2\cdot\frac{abc}{2^3}+2^2\cdot\frac{abc}{2^6}+\cdots+2^n\cdot\frac{abc}{2^{3n}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{abc}{2^3}+2\cdot\frac{abc}{2^6}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{abc}{2^{3n}}\right)\right]$$

$$=\frac{abc}{3}+\frac{abc}{6}=\frac{abc}{2}.$$

据此可知阳马与鳖臑体积之比为 2:1，所以刘徽说："按余数具而可知者，有一二分之别，即一二之为率定矣。"

既然证明了阳马与鳖臑体积之比为2:1，不难证明阳马、鳖臑的体积算法："广袤相乘，以高乘之，三而一。""广袤相乘，以高乘之，六而一。"即

$$\frac{abc}{3}及\frac{abc}{6}.$$

六　几点看法

由《九章算术》的注文可以看出，刘徽所使用的极限观念有下列几个特点：

第一，刘徽所用的都相当于数列和的极限。

第二，刘徽所用的数列都相当于单调有界的。

第三，刘徽所用的数列都相当于收敛的。

第四，刘徽所用的大都借助于无限小量的观念。

在我国古代虽然没有形成数列、数列和、单调数列、有界数列以及收敛数列的确切概念，但是，由这些实例来看，刘徽所使用的这些数列的有关概念都是符合上述要求的。

参 考 文 献

[1] 李俨：《中国数学大纲》，科学出版社，1958年。

[2] 钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，1964年。

[3] 白尚恕：《<九章算术>与刘徽的几何理论》，本书。

[4] 李　迪：《刘徽的数学思想》，《科学史文集(八)·数学史专辑》，上海科技出版社，1982年。

[5] 杜石然：《古代数学家刘徽的极限观念》，《数学通报》，1954，2。

[6] 三上义夫：《关孝和の業绩と京坂の算家并に支那の算法との关系すよび比较》，《东洋学报》，1932—35，卷20，21，22。

附 录 一

《九章算术》与刘徽所用名词今释*

我国现今所用的数学名词，有的是译自外文，有的是由古代经过多次演变而形成，也有的是沿用古名。即使是沿用古名，其意义有些也产生了巨大的变迁，可见现今所用的数学名词与古代不一定相同。

我国古代对于数学名词没有统一的规定，各家所用的名词也不尽相同，尤其《九章算术》及刘徽用词十分简奥，阅读起来则多有不便。为此，今将《九章算术》及刘徽等所用名词加以必要的解释。

今按《九章算术》的章次进行解释，以有关名词的先后为序，并在每一名词之前标以序号。

刘徽九章算术注原序

1．八卦　相传包牺氏曾画八卦，他所画的八卦是：乾☰，坤☷，震☳，巽☴，坎☵，离☲，艮☶，兑☱。卦中——称为阳爻，就数说可表示为奇，– –称为阴爻，可表示为偶。一卦有三爻，爻无论阴阳，可以上下重复相叠地排列起来，就叫做“卦”，这样的“卦”，其数有“八”（即 $2^3=8$），故称为“八卦”。

2．九九之术　“九九之术”就是现今所谓九九乘法歌诀。

* 本文部份内容系摘自白尚恕注释：《〈九章算术〉注释》（科学出版社）一书。

我国古代的"九九"，是由"九九八十一"开始，至"二二如四"止，共36句。以后把"一九如九"、"一八如八"等加入，共45句。由于这歌诀开始以"九九"两字，所以称它为"九九"，这名称一直沿用至今。

这里所说"九九之术"，若以《汉书》颜注"九九算术，若今《九章》、《五曹》之辈"来解释，其意义当不限于乘法歌诀，可能把"九九之术"作为当时数学的代名词。

3．六爻　在"八卦"里任取两卦，可以重复、上下叠置起来，这样排列，共有六十四个。每个叫做重卦，也叫做卦。每卦含有"六爻"。

4．九数　《周礼》说："养国子以道，乃教之六艺，…，六曰九数"。《周礼》未列出九数的细目，其具体内容则无法详考。

5．规矩　"规"即是圆规，"矩"就是两臂夹直角的曲柄尺。"规矩"就是度量方圆的工具。如《周礼》说："圆者中规，方者中矩"。

6．日中　"日中"就是日中正午时。

7．表　"表"就是标杆。

8．景　"景"即影字。

9．地中　"地中"就是一国地域的中央。周朝东都洛邑（即今洛阳），认为是适中的地域，故称之为"地中"。

10．重差　用"表"或"矩"进行两次测望的测量方法，古代称为"重差术"。在这种测量方法的计算中，需"重"复使用两次某两个"差"(即是景差、表间)进行计算，所以称这种测量方法为"重差术"。

11．景差　"景差"即是影差，就是两"表"日影之差。

12．法　"法"是除数。"以景差为法"就是以两表日影之差作为除数。

13．表间　"表间"即是两表之间的距离。也就是两表与两表

延长线上某处距离之差。

14．实　古代把被除数、被开方数等叫做“实”。这里“实”是被除数。

15．日去地　“日去地”就是太阳至地面的距离。

16．南戴日下　“南戴日下”就是太阳的正下面。

17．日去人　“日去人”就是太阳与人的距离。

18．股率　“股率”就是相似直角三角形两条对应的长直角边之间的比率。

19．句率　“句率”就是相似直角三角形两条对应的短直角边之间的比率。

20．大股之句　“大股之句”就是以“大股”为长直角边的直角三角形的短直角边。

21．重差　“辄造重差”之“重差”是一书名。

刘徽注《九章算术》之后，曾以九道例题编撰了《重差》一卷，并附于《九章算术》之终。到了唐代，选定十部数学著作时，把《重差》一卷与《九章算术》分离，并另行单本。由于这书第一题是测望海岛的问题，后来便把《重差》改称为《海岛算经》。这里“重差”是指《海岛算经》。

22．句股　“缀于句股之下”之“句股”，是指《九章算术》的第九句股章。

23．重表　“重表”即是用两次表进行测量的方法。

24．累矩　“累矩”就是用两次矩进行测量的方法。

25．三望　“三望”就是三次测望的方法。

26．四望　“四望”就是四次测望的方法。

一　方　田　章

1．方田　“方”就是正方形或长方形，“田”就是田地，“方田”就是正方形的田地或长方形的田地。实际上，在这里可理解为正

方形或长方形。以下仿此。

2．广 "广"就是宽，这里应理解为长方形的宽边。

3．步 我国古代没有严格区分长度、面积、体积的单位名称，把步、平方步、立方步统称为步；或把尺、平方尺、立方尺统称为尺。因此在阅读古笈时，对于这类名称必需从意义上理解。

这里沿用秦制，即 1 步＝6 尺。按照 1 步＝6 尺，对于商功章第 21 问及负土术核算不误，据此可证《九章算术》及刘徽都是使用秦制 1 步＝6 尺。

4．从 "从"音 zōng 不音 cōng。"从"就是纵，这里应理解为长方形的长边。

5．亩 "亩"就是田地面积的单位名称。

商鞅在秦国实行变法，废除了一百平方步为一亩制，改为二百四十平方步为一亩的制度。秦始皇统一六国后，采用了这种制度。这里沿用秦制，即：

1 亩＝240 平方步。

6．术 "术"就是计算法则。

我国古代对于公理、定理、推论、算法、公式没有严格的区分，统称之为术。所以在阅读古笈时必需从意义上理解。

7．幂 "冖"是幂的古体字，而冥、穿、幎、幭、鼏、羃、冪都是幂的异体字。"幂"的原意是遮盖东西所用的布，如《说文解字》称："幂，覆也。从一下垂也"。

刘歆制做王莽量器时，曾以幂表示量器的底面积。后来刘徽也以幂表示面积。在这里应理解幂为面积。

8．全 "全"就是整数。

9．分 "分"就是分数。

10．更相减损 "更相减损"就是辗转相减。两数的辗转相除法与两数的辗转相减法在理论上是一致的。

11．等数　“等数”就是两数的最大公约数。在古算里，有时称为等数，有时则简称为等。我国古代推求两数的最大公约数时，多用辗转相减的方法。当两数辗转相减时，若两方所余的数相等，则这相等的数就是两数的最大公约数。所谓“等数”可能是由更相减损得名。若以更相减损法求得两数的等数为1，则此二数实无“等数”，由于这一名称与实际不相符合，后来才逐渐改称“等数”为最大公约数。

12．合　“合”就是加。

13．合分　“合分”就是分数加法。

14．齐　两个分数通分时，分母与分子互乘叫做齐。如下文说：“凡母互乘子谓之齐”。这里的“齐”字，可看作是动词。

15．同　两个分数通分时，两分母相乘叫做同。如下文说：“群母相乘谓之同”。这里的“同”字，可看作是动词。

16．并　“并”即是加，“相并”即是相加。

17．减分　“减分”就是分数减法。

18．课分　“课分”就是比较分数的大小。

19．平分　“平分”就是求几个已知分数的算术平均数。

20．平实　仅就字意而论，“平实”当是平均数的分子。但实际上这里“平实”是平均数分子的列数倍。其中“列数”就是已知分数的个数。

21．列实　以已知分数的个数乘各分数齐同后的分子，则各称为“列实”。

22．重有分　“重有分”就是繁分。

23．经分　“经分”实际上是分数除法。

24．率　“率”就是比率，两数相比的结果叫做率。如刘徽说：“凡数相与者谓之率”。其中“相与”即是相比(除)的关系。

25．乘分　“乘分”就是分数乘法。

26．报除　“报除”就是报之以除，实际上就是除。

27．大广田　“大广田”就是乘法。这乘法既包括整数乘法，又包括分数乘法，还适用于带分数乘法，所以谓之“大广田”。

28．圭田　李籍«音义»说：“圭田者，其形上锐，有如圭然”。“圭田”是一象形名称，就字义而论，应是等腰三角形的田地。实际上“圭田”可理解为等腰三角形。

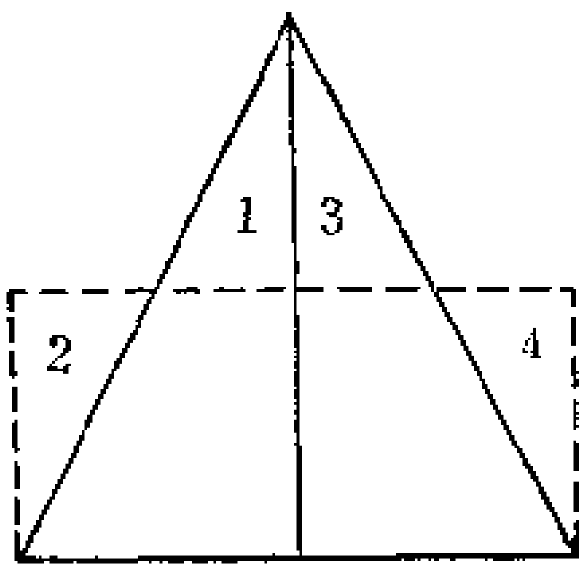


图 1

29．正从　“正从”即是高，在这里是指等腰三角形底边上的高。

30．以盈补虚　“盈”是有余，“虚”乃不足。若就字意而论，“以盈补虚”乃是以有余补充不足。若用现今术语来说，就是等积变形。如图 1，以△1、△3补△2、△4，使等腰三角形变成与之等积的长方形。这种方法一般称为割补法，或出入相补原理。

31．直田　“直田”就是长方形。

32．邪田　“邪田”就是直角梯形。

33．两邪　“两邪”是指直角梯形的上下两底边。

34．箕田　李籍«音义»说：“箕田者，有舌有踵，其形哆侈，有如箕然”。“箕田”也是一象形名称，就字意而论，当是等腰梯形。

35．舌　“舌”是指等腰梯形的长底边。

36．踵　“踵”是指等腰梯形的短底边。

37．圆田　“圆田”就是圆形。

38．周　这里“周”字是指圆周。

39．径　“径”就是圆的直径。

40．周三径一为率　圆周三与直径一的比率，即是古率。就是圆周率的近似值，即 $\pi=3$。

41．密率　这里“密率”是指 $\pi=\frac{22}{7}$。

祖冲之称 $\pi=\frac{22}{7}$ 为约率，称 $\pi=\frac{355}{113}$ 为密率。李淳风却以 $\pi=\frac{22}{7}$ 为密率。戴震说“冲之为密率，较徽率为密；其约率较徽率为疏。淳风等所称密率皆约率。”可能李淳风等认为 $\frac{22}{7}$ 比徽率3.14稍密，故称为密率。

42．徽术　这里“徽术”是指刘徽所创之圆周率，即 $\pi=\frac{157}{50}=3.14$。有时刘徽也称为新术。

43．圆中容六觚　古代作为书写的六或八棱的木简称为觚。如《孙膑兵法》：“将战书柧”。古代柧与觚字相通。颜师古注《汉书》说：“觚，角也。”这里“六觚”应理解为正六边形。“容”就是内接。“圆中容六觚”应是圆内接正六边形。以下仿此。

44．一面　“面”就是边。“一面”就是一边。这里是指圆内接正六边形的一边。

45．余径　“余径”是指圆半径与圆内接正多边形边心距之差。

46．弦　这里“弦”字是直角三角形的斜边。

47．句　“句”就是直角三角形的短直角边。

48．股　“股”就是直角三角形的长直角边。

49．差幂　圆内接正一百九十二边形面积与圆内接正九十六边形面积之差，刘徽称为“差幂”。

50．矢　“矢”就是弓形的高。实际上这是指圆内接正多边形的边心距与圆半径之差。

51．铜斛　西汉末年，王莽即位后欲划一度量衡，于始建国元年（公元9年）命刘歆铸就百余只铜斛，颁行天下，作为标准

量器。

铜斛主体呈圆筒形，两旁有耳，也各为小圆筒形。铜斛主体及右耳都有隔层，分为上、下两部，连同左耳共有斛、斗、升、合、龠五种量器。《汉书·律历志》称："其上为斛，其下为斗，左耳为升，右耳为合、龠"。

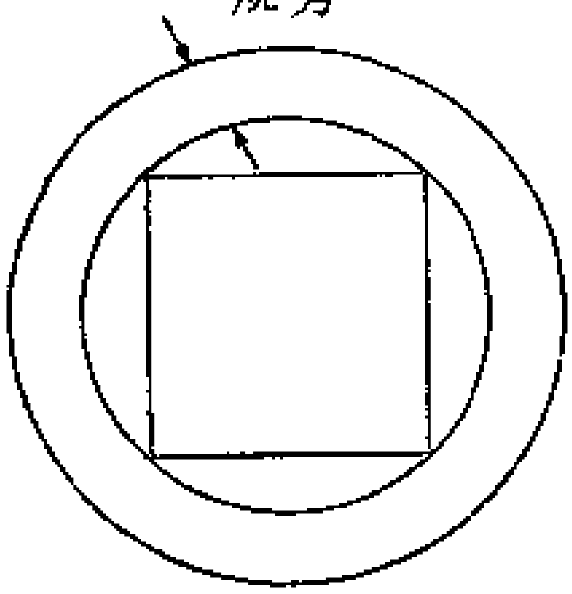


图 2

52．庣旁 《汉书·律历志》称："旁有庣焉。"郑注："庣，过也。"颜注："庣，不满之处也。"

"内方尺而圆其外"就是边长一尺正方形的外接圆，斛底内周是此外接圆的同心圆，两圆相间为九厘五毫。"庣旁"就是外接圆之外处处越过的大小(图 2)。

53．角径 "角径"就是圆内接正六边形顶角与顶角的距离，这里是圆内接正六边形的长对角线。

54．面径 "面径"就是圆内接正六边形相对两边的距离。

55．宛田 李籍《音义》："睕，当作宛，字之误也。宛田者，中央隆高。"《夏侯阳算经》丸田注："形如覆半弹丸。"罗士琳在《算学启蒙·后记》说："丸、睕音近，晼、睕形近似，睕虽不见于字书，殆如明、邢云路《古今律历考》幂积之幂别作羃，同为算书习用字。"《尔雅》说："宛，谓中央隆高。"

"宛田"就是现今所谓球冠形。

56．径 "径"是指球冠上与底面垂直的大圆弧，即现今所谓球面直径。

57．方锥 "方锥"就是正四棱锥。

58．正面邪 "正面邪"是正四棱锥的斜高。

59．圆锥 "圆锥"就是正圆锥，所说"其中容圆锥"，是指正四棱锥的内切圆锥。

60. 弧田　“弧田”就是弓形。

61. 环田　“环田”就是圆环形。

62. 中周　“中周”即是圆环形的内圆圆周。

63. 外周　“外周”即是圆环形的外圆圆周。

64. 径　“径”是圆环形外圆半径与其内圆半径之差。

二　粟　米　章

1. 粟米之法　李籍«音义»说：“粟者，禾之未舂。米者，谷实之无壳。粟者，米之率也。诸米不等，以粟为率，故曰粟米。”

“粟率五十”以下，是各种粮食的兑换比率表。由于粟米（即谷子）五斗，去皮后可得粝米(即糙米)三斗，又可舂为粺米（即九折米）二斗七升，或糳米（八折米）二斗四升，……故得：

粟米:粝米＝50:30，

粟米:粺米＝50:27，

粟米:糳米＝50:24，……。

此表所列，因以粟米为标准，所以称为“粟米之法”。

2. 今有术　“今有术”就是现今所谓四项的比例算法；也就是根据已知数及比例关系推求未知数的算法。

为了叙述方便，古代对于成比例的四项定有专名，即“所有率”、“所有数”、“所求率”及“所求数”。其比例式即：

所有率:所有数＝所求率:所求数，

或　　所有率:所求率＝所有数:所求数。

若已知前三比例项，易于求得第四项，即得

$$所求数=\frac{所求率\times所有数}{所有率}。$$

因为这种比例算法是根据“今有”数据推算的，所以«九章算术»等书称为“今有术”。

3．少半　“少半”就是三分之一。

4．太半　“太半”就是三分之二。如《史记·项羽本纪》说：“汉有天下太半。”

5．经率　“经率”实际就是除法。

若按“今有术”计算，则“所求率”为一，因“一乘不长”，故定名为“经率”术。

6．经术　“经术”实际就是分数除法。

若按“今有术”计算，则“所求率”为一，因“一乘不长”，故定这一算法为“经术”术。

7．其率　“其率”就是推求所买物品每一单位值几钱的算法。

8．反其率　“反其率”不是求贵贱物品每一单位值几钱，而是求一钱能买多少物品。因与“其率”相反，故称为“反其率”。

若按已知数据而论，“其率”与“反其率”是大、小相反；若按钱、物而论，则是法、实相反。

三　衰　分　章

1．衰分　“衰分”就是按照一定比率分配的意思。李籍《音义》说：“衰，差也。以差为平分，故曰衰分”。程大位《算法统宗》说：“衰者，等也。物之混者，求其等而分之。以物之多寡求出税，以人户等第求差徭，以物价求贵贱高低者也。”

“衰分”也叫做差分。如刘注说“衰分，差分也。”用现今术语来说，就是配分法或配分比例。

2．法集　在衰分术的除法计算中，把所配的比率相加之和作为除数，称为“法集”。

3．衰别　因所配的比率各自不同，所以称各比率数为“衰别”。也叫做“未并者”。

4．返衰　以已知所配比率的倒数作为所配的比率，这种比例算法称为“返衰”术。

四 少 广 章

1．少广　李籍《音义》说："广少，从多，截从之多，益广之少。故曰少广。"程大位《算法统宗》也说："此章如田，截从之多，益广之少，故曰少广。"若按字义而论，"少广"就是广少而从多，需截多以益少。

此处"少广"应理解为：由已知正方形面积或正方体体积求其一边之长。

2．开方　这里所谓"开方"，是指开平方。若用几何图形进行解释，就是由已知正方形面积，求其一边之长。如刘注说："求方幂之一面也。"

3．算　此处"借一算"之"算"是指一个算筹。如李淳风说："借一算者，假借一算，空有列位之名，而无除积之实。"

4．除　这里"而以除"之除字，应当作减去解释。以下仿此。

5．定法　在开平方运算中，求得初商之后，以"法"的二倍作为试除其差的除数，称这一除数为"定法"。如刘注说："豫张两面朱幂之袤，以待复除，故曰定法。"

6．袤　"袤"就是长方形的长边。

7．开圆术　这里"开圆术"是指由圆面积推求圆周或推求直径的计算法则。

8．立圆径　"立圆"就是球，"立圆径"就是球的直径。

9．开立圆术　由球的体积推求球直径的算法，称为"开立圆"术。

10．丸径　我国古代称圆为"圜"或"平圆"，借以表示平面的圆形；称球为"丸"或"立圆"，借以表示立体的圆形。此处"丸"即是球，"丸径"即是球直径。

11．圆囷　"圆囷"就是正圆柱。

12．立方棊　"棊"与"棋"通，这里"棊"字应理解为模型。

"立方棊"就是正方体形的模型。

13．牟合方盖　"牟"与"侔"通，相同的意思。"盖"就是伞，"方盖"就是方形的伞。"牟合方盖"就是合在一起的上、下两个全同的方伞。刘徽把这种形状的立体定名为"牟合方盖"，有时也简称为"合盖"(图 3)。

14．阳马　"阳马"就是底为正方形或长方形、一侧棱与底垂直的四棱锥(图 4)。

15．长邪　这里"长邪"是指球内接正方体的长对角线。

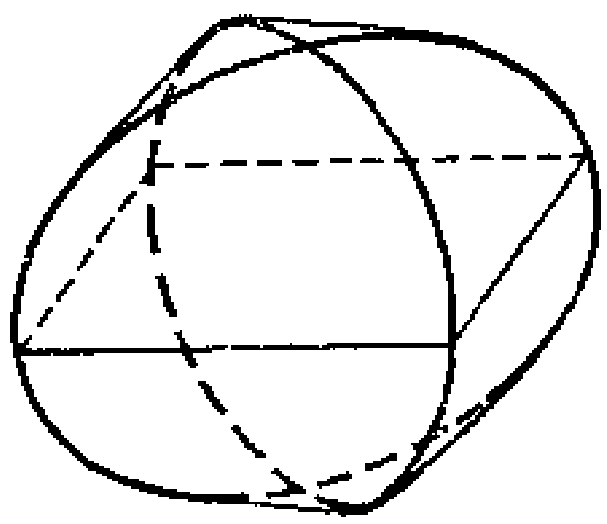


图 3

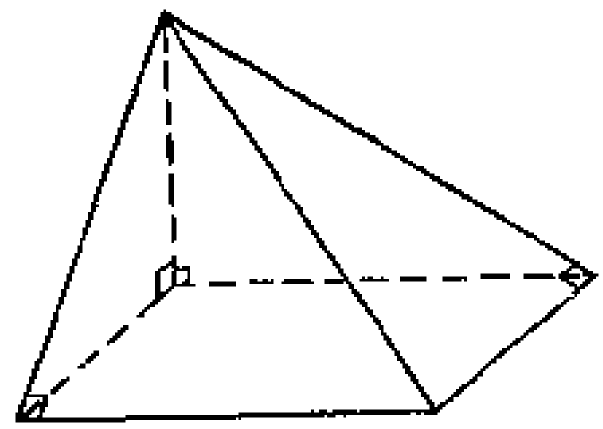


图 4

16．质　张衡把正方体称为"质"。

17．浑　张衡把球称为"浑"。

18．断上方　"断上方"就是内棊的横断面的一边。

19．断上幂　"断上幂"就是横断面的面积。

20．势　这里"势"字，可理解为高。

五　商　功　章

1．商功　"商功"就是推算各种工程和体积的算法。如李籍《音义》说"商，度也。以度其功庸，故曰商功"。

2．城、垣、隄、沟、壍、渠　"城、垣、隄、沟、壍、渠"的形状都是底为等腰梯形的直棱柱。因其功用不同，故其名称也异。

可以说“城、垣、隄、沟、堑、渠”分别是现今的城墙、土城、堤坝、水沟、城河、渠道。

3．损广益狭　“损广益狭”实际就是以盈补虚。

4．中平之广　“中平之广”可以看作是等腰梯形的中位线，也可以看作是等腰梯形两底的平均值。

5．立幂　“立幂”就是垂直于地面的平面图形的面积，在这里“立幂”是指直棱柱的底面积。

6．冬程人功　“冬程人功”就是冬季每人一日的工作量。以下仿此。

7．方垛壔　“方”即是正方形，“垛”就是柱形，“壔”乃是“以土拥木也”。这里“方垛壔”是指形为正四棱柱的土城堡。

8．圆垛壔　“圆垛壔”就是呈正圆柱形的土城堡。

9．方亭　“方亭”就是正四棱台。

10．堑堵　“堑堵”就是底为直角三角形的直棱柱。如刘徽说：“邪解立方得两堑堵。虽复椭方，亦为堑堵”。

11．圆亭　“圆亭”就是正圆台。

12．上下径　这里“上下径”是指正圆台的上、下底面直径。

13．鳖臑　如图5所示，四面都是直角三角形的四面体叫做“鳖臑”，而一般四面体也可叫做“鳖臑”。

14．羡除　李籍《音义》说：“羡，延也；除，道也”。羡字也与埏字相通。《后汉书·陈蕃传》：“民有赵宣，葬亲不闭埏隧”。

[illegible]

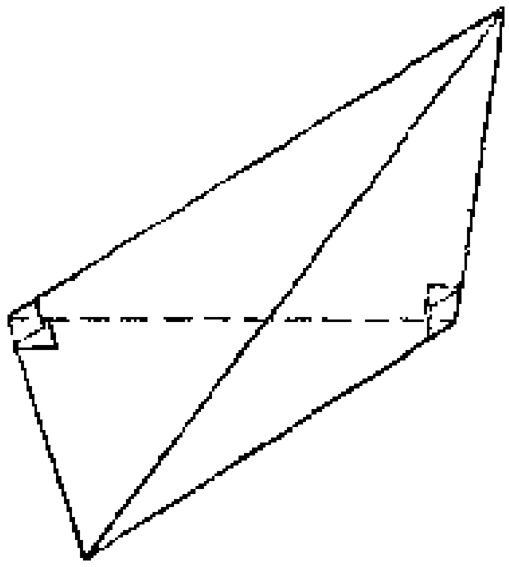


图 5

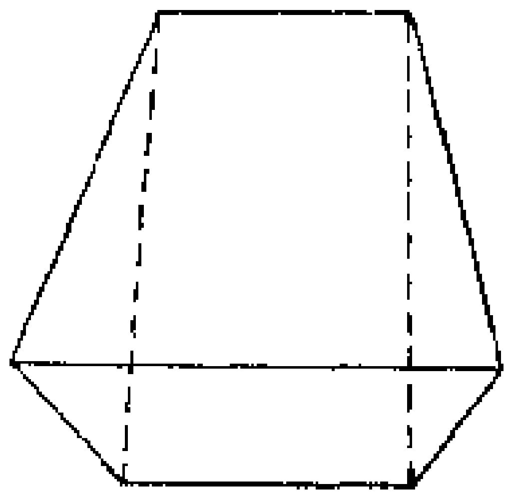


图 6

7 之 $V\text{-}EFGH$。

17．外锥　这里“外锥”是指正四棱锥之内与其内接正四棱锥之外，所夹部份的图形。也就是 $V\text{-}ABCD$ 减去 $V\text{-}EFGH$ 所剩余部份的图形(图 7)。

18．半锥　取一四棱锥，过棱锥高线及底面中位线作截面，则将此四棱锥分割为两部份，刘徽则称每一部份为“半锥”。

19．刍甍　“刍甍”就是上底为一线段，下底为一长方形的拟柱体。如刘徽注说：“正斩方亭两边，合之即刍甍之形也”(图8)。

20．刍童、曲池、盘池、冥谷　这里所说“刍童、盘池、冥谷”都是上、下底为长方形的拟台体。而“曲池”则是上、下底为环缺的拟台体。如刘注说：“此池环而不通匝，形如盘蛇而曲之”。

21．厖旁　此处“厖旁一厘七毫”之“厖旁”，应理解为“减旁”。

22．阬　“阬”即是沟，其形是底为等腰梯形的直棱柱。

23．仓　“仓”即粮仓，其形状乃是底为长方形的直棱柱。

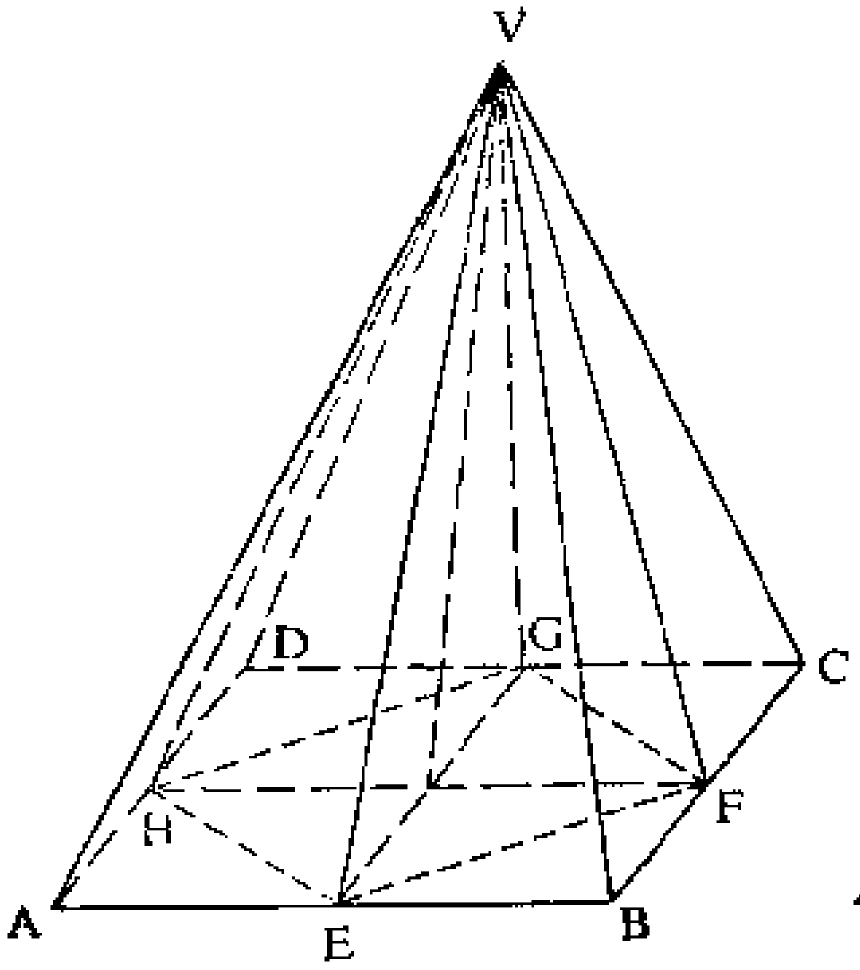


图 7

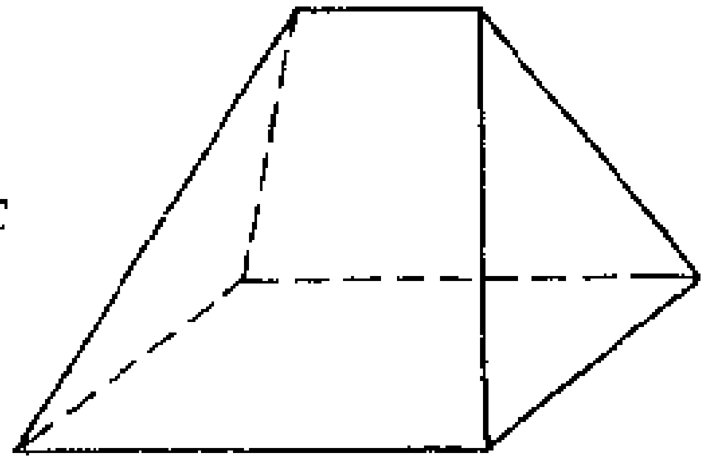


图 8

六 均 输 章

1．均输　《后汉书》称："武帝时所谓均输制也"。汉武帝元封元年(公元前 110 年)根据桑弘羊的建议实行均输制。均输制就是按人口多少、路途远近、谷物贵贱平均交纳赋税或摊派徭役的制度。"均输"术就是按这种制度推算平均交纳赋税或摊派徭役的方法。就算法而论，即是配分比例。

2．辈　"上下辈之"之"辈"就是按一定法则进行分配，如刘注说："辈，配也"。

按一定法则进行分配，就是把某一数的奇零分数舍去，加在另一数的奇零分数上，使之变成整数。

3．户率　"户率"就是人役天数的比率。

4．僦一里一钱　"僦"是运费；《史记·平准书》："弘羊以诸官各自市相与争，物故腾跃，而天下赋输或不偿其僦费"。这里

“僦一里一钱”就是每车行一里的运费为一钱。

5．重今有 “今有”术是四项比例的算法，“重今有”即是使用多次“今有”术进行计算的意思。

6．日率 “日率”即是时间。

7．差率 “差率”即是本重与末重相减之差；如刘注说：“令本末相减，余，即四差之凡数也”。若按等差数列来说，“差率”就是公差的四倍。

8．锥行衰 “锥行衰”就是以5、4、3、2、1为列衰；如刘注说：“此术锥行者，谓如立锥，初一、次二、次三、次四、次五，各均为一列衰也”。又如李籍«音义»说：“下多上少，如立锥之形”。

9．下率 “下率”就是下三节所容的算术平均数。

10．上率 “上率”就是上四节所容的算术平均数。如刘注说：“此二率者，各其平率也”。

11．列置日数及满数 按照古代算法，将日数、满数各列一行。即：

日数：	1	1	5	3	5
满数：	3	1	2	1	1

这就是“列置日数及满数”。

七 盈不足章

1．盈不足 李籍«音义»说：“盈者，满也。不足者，虚也。满虚相推，以求其适，故曰盈不足”。

一般算术题，都有一个确切答数。如果任取一数设作答数，依题核算，若结果合问，所设之数即是答数；若不合问，与已知数相较，不是盈余便是不足。通过这样两次假设，即得两个盈余或不足；这样的算术题就可变为盈不足问题。为此，一般称盈不足术为双设法，今谓弦位法。

2．所出率　“所出率”称为“两设”，也称为“假令”。如第一问“人出八”、“人出七”的“八”、“七”即是“所出率”。也就是每人(或每家)所出钱数。

3．不盈不朒之正数　“不盈不朒之正数”可理解为正确的答数。这里是指每人应出钱数。

4．设差　两个所出率相减之差，称为“设差”。又由于两个所出率一多一少，又可称“设差”为“少设”。

5．两盈、两不足术　“两盈、两不足”术就是两盈或两不足问题的计算方法。

6．盈、适足，不足、适足术　“盈、适足，不足、适足”术就是关于盈、适足或不足、适足问题的算法。

7．益疾　这里“益疾”是指良马“日增十三里”，也就是递增等差数列的公差。

8．半法　盈不足章第十九问为：“今有良马与驽马发长安至齐。齐去长安三千里。良马初日行一百九十三里，日增十三里。驽马初日行九十七里，日减半里。良马先至齐，复还迎驽马。问几何日相逢及各行几何”。“术曰：假令十五日，不足三百三十七里半。令之十六日，多一百四十里。以盈、不足维乘假令之数，并而为实。并盈不足为法。实如法而一，得日数。不尽者，以等数除之而命分”。

按刘徽注文，计算驽马行程如下：

驽马十五日的行程：$\left(97-\dfrac{14\times\frac{1}{2}}{2}\right)\times 15=1402\dfrac{1}{2}$里，

驽马第十六日仅走：$\left(97-15\times\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{135}{191}=63\dfrac{49\frac{1}{2}}{191}$里，

驽马共行里数为：$1402\frac{1}{2}+63\frac{49\frac{1}{2}}{191}=1465+\left(\frac{1}{2}+\frac{49\frac{1}{2}}{191}\right)$

$$=1465+\left(\frac{95\frac{1}{2}}{191}+\frac{49\frac{1}{2}}{191}\right)=1465\frac{145}{191}\text{里}.$$

（按术计算得相逢日数为$\frac{15\times140+16\times337\frac{1}{2}}{337\frac{1}{2}+140}=15\frac{135}{191}$日，其中$\frac{135}{191}$是相逢日数的分数部分）。

上式中，$\frac{1}{2}$可看作是以191为分母，以191之半为分子的分数，即$\frac{1}{2}=\frac{95\frac{1}{2}}{191}$。在这里刘徽称为“半法”。即“其奇半里者为半法”。

9．残分　刘徽称分数$\frac{49\frac{1}{2}}{191}$为“残分”。

10．减迟　这里“减迟”是指驽马”日减半里”，也就是递减等差数列的公差。

八　方　程　章

1．方程　“方”即是方形，“程”是表达相课的意思，或是表达式。“方程”就是方形的表达式。于某一问题中，如有含若干个

未知数的等式，把这些等式并肩排成方形，则称之为"方程"。这里所说"方程"，就是现今所谓矩阵。

2. 实　这里"实三十九斗"的"实"就是"上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉"能打出的谷子的总和。如刘注说："总言其实"。即是方程的常数项。若方程是正负项掺杂者，则称之为"差实"。

3. 直除　此处"直除"的"除"字当作减字解释，"直除"就是连续相减的意思。我国古代用"直除"法来解线性方程组，这种方法与现今加减消元法在理论上是一致的。

4. 损之曰益，益之曰损　"损"相当于减或负，"益"相当于加或正。"损之曰益，益之曰损"相当于现今移项变号法则。

5. 正负术　"正负术"就是现今所谓正负数的加、减法则。

6. 算　因古代用算筹进行计算，这里"两算得失相反"的"算"字，应理解为数。

7. 同名　"同名"就是同号两数。

8. 异名　"异名"就是异号两数。

9. 列实　"列实"就是本行的实，也即本方程的常数项。

10. 下实　"下实"就是被减行的实，也即被减方程的常数项。

11. 方程新术　"方程新术"实际就是解线性方程组的消去常数项法。

12. 相当之率　用消去常数项法解线性方程组时，将求得不含常数项的二元一次方程，如 $ax=by$，其中 a、b 即是未知数 x、y 的"相当之率"。

13. 各当之率　如上文，由 $ax=by$ 求得 $x:y=b:a$，其中 b、a 就是未知数 x、y 的"各当之率"。

14. 其一术　"其一术"就是利用各未知数的连比解线性方程组的方法。

九 句 股 章

1．句股　我国古代称直角三角形短直角边为“句”，长直角边为“股”，斜边为“弦”。如刘注说：“短面曰句，长面曰股，相与结角曰弦”。据此古代便把直角三角形称为“句股弦”或简称为“句股”。

2．出入相补　在这里“出入相补”就是“割补术”。

3．方幂　因弦幂等于句幂与股幂之和，所以在以弦为边的

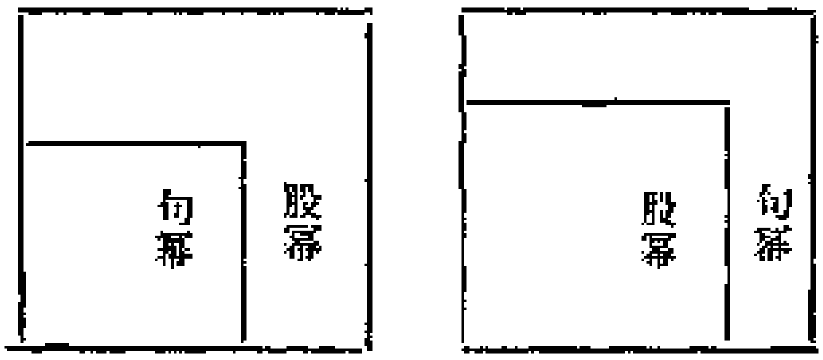


图 9

正方形中，把它分为两部份，若一部份是以句为边的正方形，则另一部份就是等于股幂的磬折形。若一部份是以股为边的正方形，则另一部份就是等于句幂的磬折形(图 9)。刘徽把这种正方形的面积称为“方幂”。

4．矩幂　刘徽把这种磬折形（图 9 ）的面积称为“矩幂”。或称这种磬折形为“句幂之矩”或“股幂之矩”。

5．大方　这里所说“大方”，是指以句、股和为边的正方形。

6．从法　古代称二次方程常数项为“实”，称一次项系数为“从”或“从法”，称二次项系数为“方法”。

7．句中容方　“句中容方”就是直角三角形的内接正方形。

8．句中容圆　“句中容圆”就是直角三角形的内切圆。

9．中弦　过直角三角形内切圆的圆心，作斜边的平行线。刘徽称这条平行线为“中弦”。

附 录 二

《九章算术》与刘徽研究论文目录

本"目录"所收，仅限于1900年以来已发表的、直接与《九章算术》及刘徽研究有关的论文题目，包括论文作者、所载刊物、卷期、年月与页数。为检索方便起见，分中文、西文和日文三部分，并均按发表时间的顺序编排。由于我们掌握资料有限，本目录肯定有许多遗漏；有的则没见到原文，而是转引自其他论著，错误难免，望国内外同行给予指正或补充。

一 中文部分

九章问题分类考　钱宝琮　学艺　三卷一号(1921年5月)，第1—10页。又载钱宝琮《古算考源》。

九章算法源流考　钱宝琮　学艺　三卷二号(1921年6月)，第1—12页。又载钱宝琮《古算考源》。

重差术源流及其新注　李俨　学艺　七卷八号(1926年4月)，第1—15页。又载李俨《中算史论丛》(一)。

九章算术盈不足术传入欧洲考　钱宝琮　科学　十二卷六期(1927年6月)，第701—714页。

九章及两汉之数学　张荫麟　燕京学报　二号(1927年12月)，第301—311页。

九章算术补注　李俨　北京北海图书馆月刊　二卷二号(1929年2月)，第127—133页。又载李俨《中国古代数学史料》。第99—111页。

九章算术源流考　孙文青　（女师大）学术季刊　二卷一期（1931 年 4 月），第 1—60 页。
汉均输法考　钱宝琮　（浙大）文理　四期(1931 年)，第 45—46 页。
九章算术篇目考　孙文青　金陵学报　二卷二号(1932 年 11 月)，第 321—363 页。又载《师大月刊》（理学院专号）三期(1933 年 3 月)，第 37—84 页。
九章算术内容分析　徐步墀　中等算学月刊　五卷三期(1937 年 3 月)，第 6—12 页。
海岛算经源流考　刘操南　益世报　1942 年 12 月 11 日
释球积术　刘操南　图书展望（科学专号）　复刊九号(1948 年 10 月)，第 9—10 页。
中国伟大的数学著作——九章算术简介　肖叔英　数学通报　1953 年 6 月号，第 37—38 页。又载《初等数学史》，第 57—60 页。
介绍祖国正负数　韩永祥　数学通报　1953 年 9 月号，第 27 页。又载《初等数学史》，第 71—72 页。
刘徽在数学上的三大贡献　许莼舫　科学大众　1953 年 10 月号，第 371—373 页。
"更相减损"的优越性　程廷熙　数学通报　1953 年 12 月号，第 15 页。
古代数学家刘徽的极限观念　杜石然　数学通报　1954 年 2 月号，第 1—2 页。又载《初等数学史》，第 103—106 页。
中国古代分数算法的发展　钱宝琮　数学通报　1954 年 9 月号，第 14—16 页。又载《初等数学史》，第 68—71 页。
圆周率 $=\frac{3927}{1250}$ 的作者究竟是谁？它是怎样得来的？　钱宝琮　数学通报　1955 年 5 月号，第 4—5 页。又载《初等数学史》，第 106—109 页。

中国古代数学家关于圆周率研究的成就　孙炽甫　数学通报 1955 年 5 月号，第 5—12 页。又载«初等数学史»，第 110—125 页。
九章算术方程术校勘记　钱宝琮　数学通报　1955 年 6 月号，第 12 页。又载«初等数学史»，第 80—82 页。
盈不足术的发展史　钱宝琮　数学教学　1955 年第 1 期 (1955 年 7 月)，第 1—3 页。
算术教材中祖国数学家的成就　钱宝琮　数学教学　1955第 2 期(1955 年 10 月)，第 13—17 页。
$\pi \doteqdot \frac{3927}{1250}$的作者和祖冲之的圆周率法　李　迪　数学通报　1955 年 11 月号，第 20—22 页。又载«初等数学史»，第125—130页。
关于圆周率$\frac{3927}{1250}$作者问题的一点意见　肖而广　(东北人大) 自然科学学报　1955 年第 1 期(1955 年12月)，第 365—366 页。
中国古代数学家对面积的研究　李迪　数学通报　1956 年 7 月号，第 23—25 页。又载«初等数学史»，第 96—102 页。
中国古代中算家的测绘术　李俨　测绘通报　2:4 (1956. 10)第 145—147 页。
"九章算术"中关于"方程"解法的成就　杜石然　数学通报1956 年 11 月号，第 11—12 页。又载 «初等数学史»，第 72—80 页。
古老的代数题·古老的方程式　王守义　中学生　第 303 期 (1957.3)，第 18—19 页。
海岛算经第七题所设数字订正　梁绍鸿　数学通讯　第 73 期(1957.5)，第 12—13 页。
九章算经圆田题和刘徽注的今释　励乃骥　数学教学　1957 年第 6 期，第 1—11 页。
中国古代的体积算法　李迪　数学教学　1957 年 8 月号，第

3—8 页。
对海岛算经第七题的另一种看法　　梁绍鸿　　数学通讯　第78期(1957.10)，第 19 页。
九章算术著作的年代　　陈直　　西北大学学报(自然科学版)1957 年第 1 期，第 95—98 页。
中算家的正负术　　李迪　　厦门数学通讯　1958 年第 3 期，第 26—32 页。
我国古代的体积计算　　杜石然　　数学通报　1959 年 5 月号，第 4—9 页。
刘徽对分数理论的研究　　李迪　　中学数学　1959 年 5 月号第 1—2 页。
我国古代的几个面积公式　　魏诗其　　上海师范学院学报 1959 年第 4 期　第 68—81 页。
我国正负数历史　杰　数学通报　1960 年 1 月号　第4—5 页。
伟大的数学家刘徽　　李迪　　数学教学月刊　1960 年第 1 期第 29—31 页。
重差术与三角测量　　许莼舫　　数学通报　1961年 7 月号　第 23—28 页。
纪念刘徽注“九章算术”1700 周年 (263—1963)　　沈康身　　数学通报　1963 年 5 月号　第 6—10 页。
刘徽弧田术及其进展　　程廷熙　　数学通报　1963 年 7 月号第 40—41 页。
刘徽«九章算术注»的伟大成就——纪念刘徽«九章算术注»创作 1700 周年　　梅荣照　　科学史集刊　第 6 期 (1963.10)　第 1—10 页。
«九章算术»今读——纪念刘徽注«九章算术»一千七百周年　　何章陆　　浙江师范学院学报 (自然科学) 1963 年第 1 期　第 1—10 页。

十进小数发展简史　李迪　数学通报　1964 年 10 月号，第 47—49，16 页。
我国古代数学的杰出成就——方程　唐尧明　新疆教育 1965 年第 1 期　第 20 页。
从"刍童"求积谈到"隙积"和"四角垛"级数　许莼舫　数学通报　1965 年 2 月号　第 45—49 页。
《九章算术·均输》第四题释译　李培业　(陕西师大)中学数学教学参考　总第 17 期(5 月)　第 39—43 页。
我国古代社会的变革和《九章算术》的形成　周冠雄、吕梓秦　华中工学院学报　1975 年第 3 期。
春秋战国到秦汉时期我国古代数学的发展　舒群　科学实验 1976 年第 5 期　第 36—38 页。
两汉时期数学发展概略　朱桂昌　思想战线　1977 年第 6 期。
我国历史上伟大的数学家刘徽　李迪　光明日报　1978 年 3 月 31 日。
出入相补原理　吴文俊　中国古代科技成就（中国青年出版社）　1978 年 3 月　第 80—100 页。又收入本书，第69—77页。
割圆术和圆周率　何绍庚　同上　第 101—110 页。
我国古代的圆周率　李迪　在科学的征途上(科学出版社) 1979 年 8 月　第 1—5 页。
我国古代数学名著《九章算术》及其注释者刘徽　白尚恕　数学通报　1979 年第 6 期(12 月)　第 28—33 页。
论刘徽的割圆术　李雄祥　中国自然辩证法研究会通讯 1980 年第 4 期(2 月)。
割圆术始末　洪万生　(台湾)数学传播　第 3 卷第 2 期。又收入《中国 π 的一页沧桑》（自然科学文化事业公司） 1981 年 1 月。

刘徽是怎样建立"重差术"的　李培业　安康教育　1980年第3期(7月)　第4—6页。
刘徽与出入相补原理　洪万生　(台湾)　科学月刊　11:10 (1980.10)
«九章算术»中之矩阵变换　李赞和　福建中学数学　1980年第3期(10月)　第20—22页。
中国古代的体积理论　洪万生　«中国π的一页沧桑»(台湾、自然科学文化事业公司)　1981年1月。
从理论体系角度看中国古代数学　洪万生　同上。
中国古代的几何学　洪万生　(台湾)科学月刊　12:8(1981.8)　第22—30页。
测望海岛　潘有发　福建中学数学　1981年第4期(8月)　第22页。
刘徽对整句股数的研究　李继闵　自然辩证法通讯　1981年第5期(10月)　第63页。

二　西文部分

On the suppsed Indebtedness of Brahmagupta to *Chiu-Chang Shuan Shu*, Datta, B. BCMS 22:1 (1930), pp. 39—51.
The *Chiu Chang Suan Shu* and the History of Chinese Mathematics during the Han Dynasty, Wang Ling, Inaugural Dissertation, Cambridge. 1956.
Horner's Method in Chinese Mathematics; Its Orgins in the Root-Extraction Procedures of the Han Dynasty, Wang Ling and Needham, J., T'oung pao, 43 (1955), pp. 345—401.
О «Математике В Девяти Книгах», Березкина, Э. И. историко~математические исследования. Вып. X (1957)

с. 427—438.
Примечания К «Математике в Девяти Книгах», Березкина Э. И. 同上 с. 514—584.
Трактат «Математика в Девяти Книгах» и его значение в истории китайской науки, Герезкина, Э. И. советское китаеведение, № 3 (1958) с. 133—135.
Арифметические вопросы в древнекитайском трактат «Математика в Девяти Книгах», Березкина Э. И. из историко науки и техники в странах востока, вып. 1 (1960), с. 34—35.
On Ancient Chinese Mathematics, Struik, D. J. The Mathematics Teacher, 56 (1963) pp. 424—432.
The Geometrical Basis of the Ancient Chinese Square-Root Method, Lam Lay Yong, Isis Vol. 61, Part 1, No. 206 (1969) pp. 92—102.
The Amazing *Chiu Chang Suan Shu*, Swetz, F., The Mathematics Teacher, 65 (1972), pp. 423—430.
Liu Hui, third-century Chinese Mathematician, Ho peng-yoke, Dictionary of Scientific Biography, American Council of Learned Societies, 8 (1973), pp. 418—424.
Два текста Лю Хуэя по геометрии (публикация), Березкина Э. И. Историко-математические исследования, вып. XIX (1974), с. 231—273.
Yang Hui's Cammentary on the *Ying Nu* chapter of the *Chiu Chang Suan Shu*, Lam Lay Yong, Historia Mathematica, 1 (1974), pp. 47—64.
Devrelopment of π in China, Lee, Kiong Pong, Bull. Malaysian Math. Soci., 6 (1975). no. 3, pp. 40—47.

The "Piling Up of Squars" in Ancient China, Swetz, F. The Mathematics Teacher, 70 (1977), pp. 72—79.

Liu Hui and Tsu Keng-chih on the Volume of a Sphere, Wagner, D. B., Chinese Science, 3 (1978), pp. 59—79.

An Early Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid: Liu Hui, Third century A. D., Wagner, D. B., Historia Mathematica, 6 (1979), pp. 164—188.

三 日文部分

支那における方程式解法の進步　三上義夫　数学世界 1910

関孝和の業績と京坂の算家並に支那の算法との関系及び比較　三上義夫　東洋学報　第20、21、22卷（1932—1935）。又重刊于《数学史研究》　2:10、11（1964）。

支那数学の社会性　小倉金之助，改造，1933年9月，又収入《数学史研究》第1輯，1934年。

中国数学の特殊性　小倉金之助，科学，1938年5月号。

九章算術解說　川原秀城　科学の名著(2)——中国天文学・数学集　朝日出版社　1980年，第47—74頁。

劉徽註九章算術　川原秀城　科学の名著(2)——中国天文学・数学集　朝日出版社　1980年，第75—264頁。

"Arithmetic in Nine Sections" and its Commentarist——Liu Hui (3-4 century A. D.)

A Summary

This book contains 19 papers on "Arithmetic in Nine Sections" and its commentarist——Liu Hui. These papers are the fruits of our studing in recent years and they consist of:

General Discussing .... 8 papers,

Geometry .... 3 papers,

Algebra .... 8 papers.

At the beginning of the book there are the preface and the introduction. This is followed by the 19 papers and then there are the two appendices and a summary of all the papers.

Introduction

A general study of "Arithmetic in Nine Sections" and Liu Hui himself, (1) The background, especially its historical, economical and social circumstances of compiling such a book 2,000 years ago, (2) The main subjects dealt with the book, (3) Its various editions, (4) Its commentaries and corrections through the ages, (5) Influences to the later generations, (6) A brief narration of Liu Hui, we believe Liu's native place is Shantong, a part of "Wei" (220—265 A. D.), one of the "Three Kingdoms."

1. A Collation of "Arithmetic in Nine Sections"

Qian's Collation (钱宝琮校点本, 1964) is the original version. The author accumulates a lot of opinions over the years, he then discards the dross and selects the essential information. He gives more than 90 notes here and there and points out their basis of corrections.

2. A General Explanation of Controvert Opinions on the "Arithmetic in Nine Sections"

Due to a deficit in the historical materials, there are different views on some problems concerning "Arithmetic in Nine Sections" and Liu Hui during the past 30 years, therefore the paper sums up objectively, these various points into 4 parts: (1) When and by whom the book was compiled (5 different views), (2) The flourished age and the native place of Liu Hui (2 different views), (3) Who was the inventor of $\pi \approx \frac{3927}{1250}$ (3 different views), (4) Who was the true inventor of the so-called Cavalieri theorem. This theorem really was discovered in China alot earlier than in the West, but who was the earliest? Liu Hui or Zhu Geng? Can it be called the theorem of Liu-Zhu principle?

3. On Characteristics of Theoretical System in the "Arithmetic in Nine Sections"

Our ancestors put calculation in chief and jointed together numbers and figures and combined the method of algebra and geometry with each other. The whole book was lacking in symbols, because our ancestors operated certain calculations depending upon different positions and

grogramming, and it was formed gradually with the modilization and programming of grogrammes even in the very early days of Chinese civilization.

4. The Principle of Congruency by and Addition Substraction

This principle means a definite figure remains area invariant in moving its position, in other words, in dissection of a definite figure the total area of the parts is equal to that of the original one, this principle is one of the chief characteristics of geometry in ancient China, it's also the important component of the theories in "Arithmetic in Nine Sections" and indeed a general method of finding new theorems. Moreover, the author discusses in different espects: theories of proportions, theories of double sights (in surveying), GouGu theorem(so called Pythagoras theorem in the West), the properties of similar right triangles, the area of a triangles represented by its 3 sides (so called Heron formula in the West), extraction of roots, solving of quadratic equationt and the theory of volumes. Finally with these principles the author sums up the development of algebra and geometry in ancient China.

5. Liu Hui and Zhao Sang

The paper introduces Liu's contemporary——Zhao Sang. Liu's native place was Shantong, a part of Wei (220—265), and Zhao's was Jiangsu, part of Wu (220—280), these two places are 1,000 miles apart. They lived in the same time but in defferent political situations. It's amazing that the works of these two men were so similar. It simply means that mathematics was wide spread and popular in the vast

land of China even as early as the third century A. D. In the paper the author gives some comparisons between these two famous mathematicians: (1) The thoughts in their research, (2) Some relative mathematical termiologies, (3) Mathematical achievements, (4) Influences to the later generations and (5) Comparisons with foreigners.

6. The Mathematical Inferences of Liu Hui

In this paper the writer summarizes the two main ideas of Liu's works, in the commentaries Liu formulated for logic rules: the rules of giving definitions, postulates and axioms. Moreover, Liu carried out logic inferences, such as analysis, synthesis, reduction to absurdity and proof by induction, etc. In the paper the writer cites plenty of examples to explain Liu's eminent prooftheory. On the other hand, Liu's audio-visual pedagogic method is rather well-known, by using mono-colour, poly-colour figures, paper-sheets and models, red and black computing rods, etc, so as to strenghthen one's understanding of logic inferences. We believe Liu's audio-visual method is a chief contribution of his own.

7. The "Arithmetic in Nine Sections" and the "Elements"

The author gives objective comparisons between these two books:

——In structure, there are normalized procedures of calculation in "Arithmetic in Nine Sections" but in the "Elements" the procedures are deductive.

——In application, the aim of compiling "Arithmetic in Nine Sections" was for use in practice, but there was no

account of practice in the "Elements"

——In content, the "Arithemtic in Nine Sections" touches too many subjects, all of them rich and colourful, but the "Elements" lays particular stress on geometry and the theory of numbers. The author also compares the background of compiling these two books, "Arithmetic in Nine Sections" was born in the period of declining logical throught patterns and was used for large-scale construction in our nation, whereas Euclid flourished in the heyday of logical thoughts. Due to these different factors these two books of properties developed. Finally the author analysed minutely about the influences of these two books to the later generations.

8. The "Arithmetic in Nine Sections" for Abroad

The author offers information concerning research works on "Arithmetic in Nine Sections" from overseas from the beginning of the century.

(1) Japan: First we introduce the results of Mikami Yoshio and Ogura Kinnosuke of Japan. The author highly appraises their works, and considers them as a bridge for western scholars easily to a knowledge of "Arithmetic in Nine Sections" and Liu's theories, and also as a ladder for younger Japanese scholars to study Chinese classical mathematics of practical convinence. subsequently the author offers again the new research and translation of "Arithmetic in Nine Sections" and Liu's commentaries in the Japanese language by Oya Shinichi, Yabuuchi Kiyoshi, etc.

(2) U. S. S. R. and Eastern Europe: The paper mainly

gives the work of A. P. Yushkevitch and E. I. Berezkina. Due to the fact that they studied too late, their works are less profound than those of the Japanese, although their works have to be affirmated and they will being active and deep effects for the scholars in U. S. S. R. Some resarch was done in Poland and Eastern Germany.

(3) U. S. A. and western Europe: The well-known texts of D. E. Smith and F. Cajori were edited many years ago, therefore, American scholars know considerably the contents of "Arithmetic in Nine Sections" and of Liu Hui himself. In Western Europe the paper tells us mainly the works done by J. Needham, Wang Ling (U. K.), Van Hee (France), K. Vogel (Germany) and D. B. Wagner(Denmark). The author points out that some of their works are of a higher level than that of Mikami.

9. The Gemetrical Theories of the "Arithmetic in Nine Sections" and of Liu's Commentaries

In the paper we discuss the fundamental theories of geometry in ancient China, here we consider area, volume, similar right triangles as their basis conseptions, the algorithms of calculating rectangular area, regular parallelepiped, the properties of similar right triangles as their basis rules. From these fundamental theories it infers algorithms dealt with segments, plan and solid figures, Moreover, principle of congruency by subtraction, and addition method of dessection, method of ratio and limit conception are the main flows of geometrical development in ancient China. The geometrical system in China and in the West, of course,

are quite different.

10. About the Source of Ancient Proofs in "Sea Island Arithmetic Classic"

Firstly, this gives 3 suitable principles for restoration, which explains the original prooftheory of Liu Hui, i. e., the relations between rectangular areas we prove the formulas of the height and distance in all 9 problems presnted in the "Sea Island Arithmetic Classic"

11. Surveying in the "Arithmetic in Nine Sections" and in Liu's Commentaries

The paper tells us the instruments, methods and calculations of surveying in ancient China, Liu had made some improvements in surveying. The author of his paper realized that Liu's booklet of surveying, i. e., "Sea Island Arithmetic Classic" is a summary of his practice, the author also analyses, with lots of examples, the virtues and defects of Liu's technology of surveying in those early days.

12. The Fractional Theory in Ancient China

Here we explain the formation and development of fractions according to our ancestors: (1) From the formation of Han Character, we consider the conception fraction was produced from the smaller unit of messurement, (2) The defintion of fraction was produced from division, (3) About the reduction of fractions to a common denominator, (4) The 4 operations of fractions and their sources, (5) The representation of fractional operation by computing rods, (6) The characteristics of fractional theories in China and their meaning in the world.

13. The Source and Various Applications of Mutual Substraction Algorithm (so called Euclidean Algorithm in the West)

It's interesting to point out that the algorithm of mutural substraction algorithm in the "Arithmetic in Nine Sections" is the same thing as the Euclidean Algorithm. The paper gives us five items of mathematics that depend upon the algorithm, they are: H. C. F., L. C. M. of some integers, the best approximate fractions of fractions, the solving method of congruence and indeterminate equations of first degree. There is a method of programming in solving

$$ax \equiv 1 \pmod{b}$$

where a, b are integers and $(a, b)=1$, the author points out the method is much more convinent than others. The paper also describes how the algorithm had spread over our eastern neighbours, for xample, in Japan, they developed and applied the algorithm in 5 fields of mathematics and made great progress. It's indeed true that the indigo blue is extracted from the indigo plant and is bluer than the plant it comes from! As a rule——the pupil surpasses his master!

14. The Ratio Theory of the "Arithmetic in Nine Sections"

The conception of "Ratio" is an even earlier conception. It was formed before 4,000 B. C. The author points out it was formed in exchanging goods, and then he enumerates the analysis of definition "Ratio" by Liu Hui: (1) A pair of relative numbers, (2) A set of numbers corresponding in proportion, (3) A property of invariant value being mul-

tiplied or divided by a same number different from zero, (4) The value may be represented by two integers mutual prime. The paper introduces 2 algorithms concerning tight relationship with ratio. Finally, it discusses the algorithm of Qi-tong, theory of proportion and distribution, the author offers some questions in the domain of the same theory as a conclusion to the paper.

15. The Proportion Theory of the "Arithmetic in Nine Sections" and of Liu's Commentaries

The paper discusses the formation of the theory. The author believes proportion theory is an important algorithm in ancient China, he deals in great detail with it in the 3 rd section of the book.

16. The Algebraic Conception of Extraction of a Cubic Root in the "Arithmetic in Nine Sections"

The author expresses the original rule by modern notations and he sums up the procedure into 3 steps, he points out that if we compare the ancient rule with the method of solving cubic equations, we may observe the rule is the same as Newton's method and also the same as Horner's.

17. About the Origin of the Rule of Double False

In ancient times some prblems were complicated, they were surpassed out of the scope of linear equations, and couldn't be solved by the "ratio" method. By means of trial and error they formed some types of rules especially that of double false. The author concludes that the formulas of the rule were formed step by step from the theory of ratio, and considers the rule was formed before that of

"Fang Zhen"

18. The Theory of "Fang Zhen" (Equations) in the "Arithmetic in Nine Sections" and in Liu's Commentaries

"Fang Zhen" is an old ancient termiology, it was firstly introduced in the 8 th section of the book. "Fang Zhen" means the system of linear equations. In ancient times it was represented in th form of a matrix by computing rods on a board or tapis. By elementary transformation of the matrix our ancestors obtained the final solution indicated distinctly in the 8 th section. In addition to this method Liu Hui developed a new method. The paper touches on some subjects concerning the theory of "Fang Zhan" (1) Liu's definition of "Fang Zhen" contained an idea of modelization of mathematical problems, (2) The original solving of method indicated in the 8 th section was the application and development of the ratio theory, and the positive-negative rule is the development of programmed process of the solving method, Liu's new solving method possessed alot of pronounced colour to that of the ratio theory.

19. Liu's Applications to Limit Theory

The paper enumerates the applications to limit theory in Liu's commentaries, they are: the measurement of the area, of a circle and an arch, extraction of roots and the ratio between the volume of a pyramid and a tetrahedroid.

"Arithmetic in Nine Sections" and its Commentarist Liu Hui

Contents

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

*　*　*　*　*　*　*

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *

* * * * * * *